EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DGETI

Aprendizajes Esenciales

Álgebra

Manual del Estudiante

Periodo escolar
2020-2021

Academia Nacional de Matemáticas

Propósito

Desarrollar las competencias necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, en los planteles de la DGETI de la República Mexicana y que les permita alcanzar el perfil de egreso que exigen los nuevos tiempos, enfrentando la contingencia sanitaria actual que se presenta en el país por SARS COV-2, que requiere de su permanencia en casa. Asimismo, cada manual está diseñado para servir de apoyo al docente titular de las asignaturas para propiciar en el alumno, aún en la distancia, el interés de dirigir su automotivación hacia el aprendizaje autodidacta de los contenidos de los programas de estudio vigentes de las asignaturas de Matemáticas en el plan nacional educativo, a través de la construcción de sus propios conocimientos y la aplicación pertinente de éstos en su contexto personal y su vida cotidiana, desde una óptica crítico-analítica del pensamiento individual.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de la propia interpretación del universo, la interrelación con los demás individuos y de una auto comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian es en el nivel e intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y de diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo, que hoy en día lucha por contraponerse a las ideas erróneas de que todo el mundo puede aprender los mismos conocimientos, las mismas disciplinas y del mismo modo y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas requieren de estrategias que permitan al alumno que las competencias que son adquiridas en la escuela se sitúen en un ambiente cotidiano para relacionar, interpretar, inferir y aplicar los saberes a la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes se relaciona directamente con las condiciones que se deben dar para lograr que los aprendizajes en el estudiante sean significativos y lo más funcional posible.

El proceso de evaluación de las competencias consiste en utilizar los medios que permitan a los alumnos reconocer si los esquemas de actuación aprendidos le son de utilidad, a tal grado que le sirvan para intervenir correctamente ante una situación problemática planteada en la cotidianidad.

Marco referencial

Al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es posible percatarse que los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los docentes para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real. Esto exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar y aplicar los saberes a la resolución de problemas, mediante la intervención en la realidad reflexionando y actuando sobre la acción y reaccionando con responsabilidad ante situaciones imprevistas o contingentes.

El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos lo más aproximados a la realidad; para evaluarla es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.

Dado que las competencias están constituidas por uno o más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación bajo el enfoque de competencias no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que en paralelo también el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso tal y como aparece en el manual, pretende abarcar los aprendizajes esenciales que le sean útiles al alumno del semestre correspondiente de bachillerato, en los horarios asignados por las autoridades directivas de cada plantel a los titulares de la asignatura. La modalidad del curso es a distancia, es decir, utilizando las herramientas digitales que le permitan al docente comunicarse en la distancia e interactuar con sus alumnos no teniéndolos presentes físicamente, debido a la contingencia del Covid 19.

Los manuales están estratégicamente diseñados para propiciar la participación activa, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. Asimismo, las etapas de apertura, desarrollo y cierre, así como las actividades de contextualización y transversalidad y el tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

Un escenario de este tipo pretende crear las condiciones que propician aprendizajes significativos desde la distancia, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que se hace y para qué se hace, y no sólo de solucionar el problema. En esta perspectiva, el docente está comprometido a supervisar de manera permanente el trabajo de sus alumnos, orientar y retroalimentar los contenidos que se requieran en plenarias, o en especial individualización, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los estudiantes.

Esta obra se hará llegar a los alumnos por los medios que dispongan en el contexto de cada región del país, tratando de abarcar la totalidad de la población de estudiantes de la DGETI. Para ello, en los planteles se establecerán los mecanismos para que se lleve a cabo una interacción favorable entre maestros y alumnos, a fin de dar seguimiento a los avances que tengan los jóvenes y establecer los criterios de evaluación que se consideren viables de acuerdo con las circunstancias de cada región, en el marco de la contingencia actual.

Recomendaciones para la impartición del curso

Este material contempla en su estructura una serie de estrategias didácticas y ejercicios con un grado de complejidad gradual ascendente, cuyo principal propósito es que los procedimientos para su resolución y respuestas sirvan de parámetro a todos los involucrados en el proceso educativo, para emitir una opinión basada en el análisis de su alcance e importancia de desarrollarse siguiendo un razonamiento lógico-matemático.

Debido a la trascendencia académica del curso-taller sugerimos tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. En la medida de lo posible, que los docentes que impartan el curso posean las competencias necesarias, preparación pedagógica, dominio de los temas y estabilidad emocional, que le permitan desempeñarse en este importante puesto social.

2. Los ejercicios tienen un grado de complejidad ascendente, por lo que es recomendable que el docente informe a los alumnos sobre el impacto que tiene cada habilidad en el aprovechamiento escolar; de igual forma, es pertinente que si observa en el grupo dificultades en alguna habilidad, la ejercite hasta que se domine, o en su defecto, brinde la oportunidad al estudiante de desarrollarla en otro espacio (plataforma Khan Academy, por ejemplo), o la estrategia que el considere pertinente.

3. Se efectuará el registro de las calificaciones que cada alumno obtenga en los diversos contenidos, para que al final del curso sea entregada de manera informativa a los alumnos como una evidencia que legitimó su calificación final del curso.

4. El docente podrá realizar clases por video conferencias, grabar sus propios videos explicativos, proporcionar links de videos y textos explicativos de los temas, tutoriales, etc. con el propósito de que el estudiante tenga los recursos suficientes para la adquisición de las competencias y aclaración de posibles dudas en los contenidos.

5. Proporcionar al alumno y, si es posible, a los padres de familia (grupo de WhatsApp), los aspectos a considerar en la evaluación y su promedio parcial y final a tiempo para que tenga oportunidad de prepararse y regularizarse, de ser necesario.

6. Se debe tener consideración y empatía con aquellos alumnos que no tengan el recurso de conectarse diariamente y tratar de localizarlos con medios que estén al alcance de sus posibilidades y dándoles la oportunidad de trabajar o regularizarse en las condiciones que le favorezcan. Como, por ejemplo, ponerse de acuerdo en entregar tareas

o evaluaciones en un punto de reunión física, por excepción y siguiendo las consideraciones de la sana distancia por la contingencia.

Competencias para desarrollar en el curso.

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
	2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.	1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
	2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
	6. Utiliza las TIC's para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
	3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.

Introducción

Las autoridades de la Secretaría de Educación Pública del país, han planeado la apertura de las clases a distancia en este período de contingencia, en todos los niveles educativos, aprovechando los medios electrónicos para que los docentes puedan desarrollar su cátedra de manera digital, teniendo comunicación con sus grupos de alumnos y así poder desarrollar las estrategias pertinentes que le permitan al estudiante alcanzar, en lo mayor posible, las competencias establecidas en los planes y programas de estudio nacionales.

Este manual es el esfuerzo conjunto de la academia nacional de matemáticas de la DGETI y se plantea como una estrategia que le permita a los estudiantes de nivel medio superior adquirir las competencias necesarias, a partir de la recuperación de sus conocimientos previos y la construcción de aprendizajes elementales esenciales para continuar con su desarrollo y formación a través de la adquisición del sentido numérico, con el cual pueda transitar eficientemente hacia el manejo y comprensión de la abstracción que da el conocimiento lógico-matemático.

La construcción del conocimiento deberá ser individual y colaborativa, donde todos los estudiantes tengan la oportunidad de adquirir los mismos conocimientos, según su propia percepción de la realidad.

El curso tiene una duración de 13 semanas, divididas en tres bloques parciales, donde el alumno, guiado por el docente titular deberá participar activa y dinámicamente en la construcción de sus aprendizajes y la solución de problemas en cada asignatura, en el marco de un ambiente digital o a distancia, debido a la imposibilidad de realizarse presencialmente por el riesgo de contagios presente en esta época que nos tocó vivir.

El manual está estructurado en secciones que incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como estrategias sistemáticas que le permitan al alumno construir su conocimiento personal, adueñándose del manejo de las herramientas esenciales que le serán útiles en la adquisición de conocimientos formales posteriores y llegar a alcanzar su formación profesional y poder intervenir en los cambios que la sociedad actual le demande.
¡Somos orgullosamente DGETI!

Justificación

Estos tiempos que les tocó vivir a los estudiantes de nuestros planteles en todo el país son particularmente difíciles. Tener que enfrentarse a las circunstancias de la nueva modalidad de educación a distancia, representa para la mayoría de ellos un verdadero problema en el afán de comprender los contenidos que marcan los programas de estudio vigentes en todos los niveles. Contar con los medios de comunicación digitales adecuados en casa, aunado a las dificultades económicas que muchos de nuestros alumnos atraviesan, se ha convertido en un complicado reto para ellos y sus familias.

Conscientes de esta situación, las autoridades de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y la Academia Nacional de Matemáticas de este subsistema, se han dado a la tarea de diseñar estrategias que favorezcan en todo lo posible la enseñanza de los temas de matemáticas, que le serán útiles para la continuación de sus estudios en este nivel bachillerato y los que el joven emprenda a continuación, en la búsqueda de su preparación y formación profesional.

Es por eso que los manuales elaborados por dicha academia están diseñados para apoyar la práctica docente y colaborar con los alumnos detonando en ellos la capacidad de observación, globalización, jerarquización, regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, sus competencias matemáticas, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana.

Este material es el resultado de la experiencia de los maestros que lograron concentrar los contenidos de los programas de las asignaturas de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo Integral y trabajar en sólo los esenciales, con el propósito de ofrecer a los alumnos las herramientas prioritarias para su formación académica en este nivel y sus estudios posteriores, evitando así el exceso de trabajo escolar en su hogar.

Índice

Bloque 1 | Expresión algebraica

1.1 Tránsito del entorno aritmético al algebraico

1.1.1 Tránsito del lenguaje común al lenguaje algebraico

Introducción

La necesidad de ampliar los conocimientos aritméticos para resolver problemas más complejos, que requerían el manejo de cantidades que, aunque desconocidas, se manifestaban en la ocurrencia de fenómenos naturales y sociales, que atrajeron la curiosidad de las mentes brillantes de las generaciones pasadas. Esta ampliación o generalización del conocimiento aritmético dio lugar a una nueva rama de las matemáticas, el Álgebra. En la actualidad el Álgebra sigue siendo una herramienta científica esencial para el estudio de las relaciones cuantitativas en todas las ramas de la ciencia.

La principal característica del Álgebra es el uso de letras o literales para representar cantidades desconocidas que se relacionan y rigen con las mismas reglas de la Aritmética. Todo lo que aprendiste en la primaria y secundaria se sigue aplicando en Álgebra. Por eso se dice que el Álgebra, es la generalización de la Aritmética.

La herramienta principal del Álgebra y en general del lenguaje matemático es la **expresión algebraica**, la cual representa la relación que existe entre diferentes cantidades y/o magnitudes utilizando los signos de operación, relación y agrupación. Al igual que el lenguaje común, el lenguaje matemático está constituido por símbolos que representan ideas o conceptos.

Para comprender un lenguaje es necesario apropiarse del significado de los símbolos que maneja. Para traducir de un lenguaje a otro, entonces, se requiere de establecer los símbolos de cada lenguaje que tienen un mismo significado.

En nuestro caso, nos interesa, por un lado, poder representar una situación o problema que este enunciado en lenguaje común o cotidiano, en lenguaje algebraico, de manera que a partir de allí podamos aplicar el poder de las matemáticas para resolverlo. Por otro lado, también es necesario el proceso inverso, la interpretación de expresiones matemáticas para *comprender* lo que representan en nuestro lenguaje cotidiano.

Actividades de Apertura

Para poder cambiar el lenguaje común a algebraico, primero debemos identificar las operaciones aritméticas básicas y las palabras afines a ellos.

Signo de operación	**Palabras afines o sinónimos.**
+	**Suma**, mas, mayor, agregar, adición, acumula, gana, incrementa …
-	Resta, **diferencia**, menos, menor, sustracción, pierde, disminuye …
X	Por, veces, multiplicación, factor, **producto**, coeficiente, doble, triple, …
÷	División, entre, **cociente**, razón, fracción, medio, cuarto, tercera parte, semisuma, semi…
^	Exponente, potencia, elevado a, cuadrado, cubo,…
$\sqrt{\ }$	Raíz.

Una diferencia entre el lenguaje común y el algebraico es que el lenguaje común se lee en la mayoría de los casos de izquierda a derecha, mientras que el algebraico se lee desde "afuera" o desde las operaciones que afectan a la mayoría de los elementos, en forma posterior se va particularizando en cada uno de los elementos. En igualdad de condiciones de operaciones, nos referiremos primero al elemento a la izquierda y después el de la derecha.

Ejemplo 1.- Convierte el siguiente enunciado en una expresión algebraica.

La suma del triple de un número más el doble de otro número distinto al cuadrado.

Procedimiento: Empezaremos a analizar y construir la expresión por partes, tomando los diferentes elementos del enunciado.

Parte del enunciado	**Explicación**	**Lenguaje algebraico**
La suma	significa que van a sumarse, al menos dos elementos	____+___
del triple de un número	el triple es una multiplicación por 3 de una variable	3x + ___
más el doble de otro número distinto al cuadrado	Después del signo + se indica una multiplicación de 2 por otra variable elevada al cuadrado.	$3x + 2y^2$

Actividad 1. Traduce las siguientes expresiones algebraicas al lenguaje común.

Expresión Algebraica	**Lenguaje común (Respuestas)**
$x^2 + y^2$	
$3x^2 + 2x + 4$	
$\sqrt{x^3 - 2y}$	
$\sqrt{6x^3 + 2y^2}$	
$\sqrt[3]{\frac{2x^2}{3y}}$	

Ejemplo 2.- Convierte en lenguaje común la siguiente expresión algebraica. $(\boldsymbol{2x - y^3})^2$

Para realizar este procedimiento iniciaremos desde "afuera", es decir desde la operación que describe o afecta a todos los elementos de la expresión (cuadrado), después continuaremos con la descripción de lo que se encuentra dentro del paréntesis (resta) y por último describiremos de izquierda a derecha los elementos que se restan.

Lenguaje algebraico	Explicación	Lenguaje común
$(2x - y^3)^2$	El cuadrado afecta a todos los elementos	El cuadrado
$(2x - y^3)$	Dentro existe una resta	de la diferencia
$2x$	Describimos el elemento de la izquierda	Del doble de un número
y^3	Describimos el último elemento	Y el cubo de otro número distinto.

Al conjuntar el enunciado nos queda:

El cuadrado de la diferencia del doble de un número y el cubo de otro número distinto.

Al hablar de lenguaje común existen varios sinónimos o formas más breves para hacer el enunciado como:

El cuadrado de la <u>resta</u> del doble de un número y el cubo de otro número distinto. (Usando un sinónimo)

El cuadrado de la diferencia del doble de un número y el cubo de otro.

(Simplificando el enunciado)

Cualquiera de las respuestas anteriores es correcta, aunque existen muchas otras, la última por su brevedad es la más usual.

Cuando se adquiere cierta habilidad ya no será necesario hacer tablas u otro tipo de ayudas, ya que el proceso se vuelve algo mental y automático, para ello se debe ejercitar con la realización de diversos ejercicios.

Actividades de Desarrollo

La traducción de un problema al lenguaje algebraico requiere un razonamiento más profundo que los ejercicios anteriores, dado que en la mayoría de las ocasiones las operaciones a realizar no están establecidas explícitamente.

La clave de traducción de lenguaje común a algebraico de un problema es establecer las expresiones algebraicas que se deducen de la comprensión del enunciado y si existen relaciones de igualdad o de comparación cuantitativa, formular las ecuaciones o desigualdades que al resolverlas nos lleven a la solución de problemas.

Uno de los aspectos en que mayor dificultad tienen los alumnos al resolver exámenes de ingreso para las escuelas y las pruebas estandarizadas de desempeño (ENLACE, PLANEA, PISA, etc.) es la comprensión y/o traducción de problemas redactados en lenguaje común o formal en algebraico. Es frecuente que los alumnos sepan resolver problemas que se plantean en forma algebraica, pero no cuando se plantea un problema como un enunciado.

En el presente curso se desarrollarán diversos ejemplos y se solicitará la resolución de ejercicios que desarrollen las habilidades de:

- Identificar las cantidades conocidas y desconocidas dentro del problema (datos o números e incógnitas o variables).
- Identificar las operaciones que afectan o relacionan a los números o variables.
- Construir las ecuaciones que representen las condiciones del problema (modelo matemático).
- Resolver las ecuaciones planeadas para encontrar la(s) soluciones.

Ejemplos:

1. **José tiene un terreno cuadrado. ¿Cuál es la expresión algebraica de su perímetro?**

Si esta pregunta se le hiciera a un alumno adelantado de primaria, diría que le faltan datos para responder. Sin embargo, dentro del marco algebraico podemos responderla, pues sabemos que lo que se requiere es la medida de un lado del cuadrado, entonces, nombrando una literal que represente esa medida podemos expresar el perímetro.
Sea *l = medida del lado del cuadrado. La medida del perímetro la podemos expresar como* $l + l + l + l$ *y* sabiendo que una suma de números iguales se puede abreviar mediante una multiplicación, el resultado final sería $4l$.

---

2. **María fue al mercado a comprar cebolla y tomate. ¿Cuántos kilos de verdura cargó de regreso a su casa?**

Sabemos que los kilos de verdura los podemos obtener sumando los kilos de tomate y los kilos de cebolla. Como no tenemos esa información, el problema es aritméticamente insoluble, Pero con las herramientas del álgebra solo tenemos que asignar una literal que represente la información faltante:

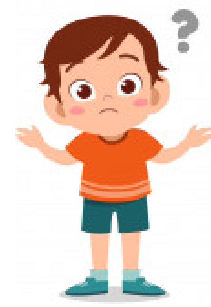
x= Kilos de tomate, y=kilos de cebolla, por lo tanto, María llevó **x + y** kilos de verdura. Observe que se requiere el uso de dos literales, una para el peso de cada verdura, porque no hay una relación explicita entre las cantidades de las verduras compradas.

Si el enunciado informara adicionalmente que María compró el doble de cebolla que de tomate entonces no habría necesidad de usar dos literales pues y=2x y entonces la respuesta para el total de kilos comprados sería x + 2x =x+x+x=3x.

Siempre que intentemos resolver un problema algebraico debemos utilizar el menos número de literales o incógnitas.

---

3. **Juan descargó tres archivos de la red de internet, cada uno el doble de pesado que el anterior. ¿Cuántos MB de datos de memoria ocupó en su USB?**



En este enunciado se tienen aparentemente tres cantidades desconocidas. Representemos estas por las literales que escojamos:

X= MB del primer archivo, Y= MB del segundo archivo, Z=MB del tercer archivo.

Entonces la expresión de la memoria ocupada es: X+Y+Z

Pero del enunciado proporciona información que compara la cantidad de memoria de un archivo con la de los otros.

Sabemos que Y=2X y que Z=2Y=4x, por lo tanto, no requerimos de tres literales o incógnitas, basta con una. Así la expresión del total de memoria usado es:

X+2X+4X=7X.

---

4. **En una caja en forma de prisma rectangular se acomodan latas que miden lo mismo de diámetro que de alto. ¿Cuántas latas contiene la caja?**

Siempre que se tenga necesidad de establecer una expresión algebraica a partir de un enunciado, piensen en que tendrían que hacer para responder la pregunta si tuvieran toda la información, es decir, si el problema fuera aritmético y a partir de allí sustituyan los datos faltantes por las literales que representan las incógnitas.

Por ejemplo, en esta situación, debemos saber que el total de latas que caben en la caja se obtiene multiplicando el número de latas que caben a lo largo por las que caben a lo ancho por las que caben a lo alto. Entonces, solo definimos las incógnitas:

l= número de latas a lo largo, w= número de latas a lo ancho, h=número de latas a lo alto.

Así**, lwh** es la expresión **del total de latas de la caja.** Con la información dada no es posible utilizar menos literales en la expresión.

Ahora practica lo aprendido y establece la expresión algebraica que represente las siguientes situaciones.

1. El profesor Rigoberto tiene cuatro hijos. Cada uno es un año mayor que el anterior. ¿Cuál es el total de años que acumulan los cuatro hijos de Rigoberto?

2. Jesús tiene un terreno cuadrado y su hermano uno rectangular. El largo del terreno de su hermano mide 5 metros más que el lado del terreno de Jesús. Mientras que el ancho del terreno de su hermano mide lo mismo que el lado del terreno cuadrado. ¿Cuál es el área total de los dos terrenos?

3. En una caja de cartón se empacan latas de atún. Al acomodarlas, resulta que caben 5 latas más a lo largo que a lo ancho y a lo alto caben 3 latas más que a lo ancho. ¿Cuántas latas caben en total en la caja?

4. Se tienen 2 canastas. Cada una contiene calabazas y zanahorias. En la primera canasta hay el doble de kilos de calabaza que en la segunda y en la segunda canasta hay 3 kilos más de zanahoria que los kilos de calabaza que hay en la primera. La primera canasta tiene 4 kilos menos de zanahoria que la segunda. ¿Cuántos kilos pesan ambas canastas en conjunto?

Actividades de Cierre

Un primer paso y muy importante es lograr establecer las expresiones algebraicas derivadas del análisis de las situaciones en estudio en las diferentes ramas de la ciencia y de la técnica. Pero otro, no menos importante, es el establecimiento de las igualdades adecuadas y pertinentes que permitan conocer las ecuaciones que permitan llegar a la solución de problemas. En este momento no resolveremos las ecuaciones resultantes, solo las plantearemos.

Consideremos las 3 primeras situaciones cuyas expresiones algebraicas ya determinamos anteriormente añadiéndoles información que permitan establecer ecuaciones que dan lugar a la solución del nuevo problema.

1. José tiene un terreno cuadrado y el presupuesto para cercarlo indica que se requieren 60 metros de tela de alambre. ¿Cuál es la ecuación que permite calcular la medida del lado del terreno?

Como ya se había establecido que la expresión del perímetro es 4x, entonces la igualdad que permite resolver el problema es 4x=60.

---

2. María fue al mercado a comprar cebolla y tomate. Si hubiera comprado dos kilos más de tomate y el doble de cebolla, llevaría a casa 10 kilos de hortalizas. Por otro lado, si hubiera comprado la mitad del tomate que lleva, el peso de las hortalizas sería de 6 kilos. ¿Cuántos kilos de cada una de las hortalizas compró?

Anteriormente establecimos las literales x= kilos de tomate que compro Maria, y= kilos de cebolla.

x + y = peso total de hortalizas compradas.

No se sabe cuántos kilos compró, pero de las condiciones dadas, sabemos que:

$x+2+y=10$. Ya que si hubiera comprado 2 kilos más de tomate el total serían 10 kilos. La ecuación anterior tiene dos incógnitas, por lo tanto, requerimos formular otra ecuación para que se pueda resolver el problema.

Sabiendo que si hubiera comprado la mitad del tomate que compró, llevaría 6 kilos en total, tenemos que: $\frac{1}{2}x+y=6$.

Las ecuaciones que al resolverlas nos dan la solución del problema son:

$$x+2+y=10 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}x+y=6$$

Nota: La solución de ecuaciones es un tema que será tratado posteriormente.

---

3. Juan descargó tres archivos de la red de internet, cada uno el doble de pesado que el anterior. Para guardarlos utilizo un dispositivo USB de 32 GB, el cual ya tenía información equivalente a 100 MB. Después de almacenar los tres archivos la

memoria ocupada ascendió a 940 MB ¿Cuántos MB de datos ocupó cada uno de los archivos?

Recordemos que 7x es la memoria ocupada por los tres archivos. En total, la memoria ocupada en MB es la diferencia entre 940-100=840 MB.

La ecuación es: 7x=840. Resolviendo la ecuación para conocer x= memoria ocupada por el primer archivo, se puede calcular la de los archivos restantes.

Actividad 2

Determina las ecuaciones que permitan resolver los problemas planteados a continuación. Recuerda que solo se requieren las ecuaciones, no su solución.

1. El profesor Rigoberto tiene cuatro hijos. Cada uno es un año mayor que el anterior. La suma de sus edades es de 54 años ¿Cuál es la edad del mayor de los hijos de Rigoberto?

2. Jesús tiene un terreno cuadrado y su hermano uno rectangular. El largo del terreno de su hermano mide 5 metros más que el lado del terreno de Jesús. Mientras que el ancho del terreno de su hermano mide lo mismo que el lado del terreno cuadrado. Si la superficie o área de los terrenos juntos es de 1200 metros cuadrados ¿Cuáles son las medidas de los dos terrenos?

3. En una caja de cartón se empacan 400 latas de atún. Al acomodarlas, resulta que caben 5 latas más a lo largo que a lo ancho y a lo alto caben 3 latas más que a lo ancho. ¿Cuántas latas en total tocan el fondo de la caja?

4. Se tienen 2 canastas. Cada una contiene calabazas y zanahorias. En la primera canasta hay el doble de kilos de calabaza que en la segunda y en la segunda canasta hay 3 kilos más de zanahoria que los kilos de calabaza que hay en la primera. La primera canasta tiene 4 kilos menos de zanahoria que la segunda. El peso total de las dos canastas es de 46 kilogramos ¿Cuántos kilos de calabaza contiene la primera canasta?

Actividad 3

Inventa enunciados de situaciones o problemas que den lugar a expresiones algebraicas y/o ecuaciones y determina dichas expresiones.

Lenguaje común	Expresión Algebraica

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Para cada problema dado determina las ecuaciones necesarias para llegar a la solución.

1. En el corralón de la ciudad de Monterrey están almacenados 1700 vehículos, entre sedán, pick ups, vagonetas y camiones. Hay 300 autos Sedán menos que Pick Ups. Las vagonetas son las 3/8 octavas parte de las Pick Ups, mientras que los camiones son 1/10 del total de autos y vagonetas existentes. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay en el corralón?

2. El camino entre 2 pueblos es plano en la mitad de la distancia y el resto es una parte cuesta arriba y otra parte cuesta abajo. A un ciclista le toma 2:40 horas ir de un pueblo al otro y dos horas para regresar. Sus velocidades son 6, 12 y 18 millas por hora cuestan arriba, en terreno plano y cuesta abajo, respectivamente. ¿Cuáles son las longitudes del camino plano, y de los dos tramos inclinados?

3. Se invierten 7300 dólares en total, una parte al 5 % y el resto al 6 %. El ingreso anual de la inversión es 34 dólares mayor que el obtenido si el total se hubiera invertido al 5% de interés. ¿Cuánto se invierte a cada tasa de interés?

Ejercicios Adicionales

I. Convierte las siguientes oraciones del lenguaje común en expresiones algebraicas de la siguiente tabla, anotando en los espacios en blanco. **(Utiliza letra legible)**

Lenguaje común	**Expresión Algebraica**
El cociente del cuadrado de la diferencia de dos números entre su suma.	
El triple del cuadrado de un número más el cuádruple del mismo al cubo.	
El producto de la raíz cuadrada del doble de un número por la raíz cúbica del triple de otro.	
El doble de un número al cuadrado más el quíntuple del mismo número menos ocho	
La raíz cúbica del cuádruple de un número al cubo más el triple de otro.	

1.2 Notación

1.2.1 Término algebraico y elementos (signo, coeficiente, base y exponente)

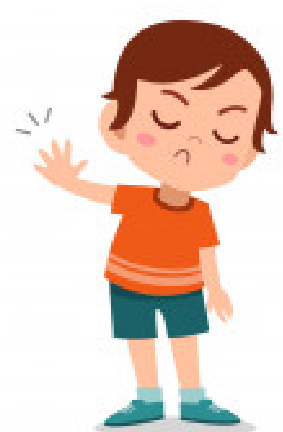
Introducción

La palabra "álgebra" procede del árabe y significa reducción y es la rama de las matemáticas que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades. Álgebra a diferencia de la aritmética, en donde solo se usan los números y sus operaciones aritméticas de las 4 operaciones básicas (+, − , x , ÷), en álgebra los números son representados por símbolos (usualmente a, b, c, x, y, z), sin embargo se pueden usar en general todo el abecedario e inclusive en algunos casos combinaciones de las letras para definir algo más específico como es el caso de algunas constantes físicas o químicas donde pasan de ser variables (donde el valor cambia) a constantes (donde el valor nunca cambia).

Notación algebraica: Consiste en que los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas. Las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d, ... Las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z. Los signos empleados en álgebra son tres clases: *Signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.*

Signos de *operación*

En álgebra se verifican con las cantidades las mismas operaciones que en aritmética: suma, resta, multiplicación, elevación a potencias y extracción de raíces, que se indican con los principales signos de aritmética excepto el signo de multiplicación ya que en lugar del signo " × " que se usa en aritmética, se suele emplear un punto medio entre los factores " a • b" o también colocando los factores entre paréntesis "(a)(b)".



I. **Ley de los signos:**

Si los signos son iguales el resultado de una multiplicación de términos debe ser positivo. En cambio, si los signos son diferentes el resultado será negativo. En otras palabras, podría decirse signos iguales se suman, signos diferentes se restan. Esto va relacionado en operaciones básicas con números enteros. Lo anterior mencionado se muestra en la siguiente tabla:

Suma y resta

Signos iguales se suman y se deja el mismo signo

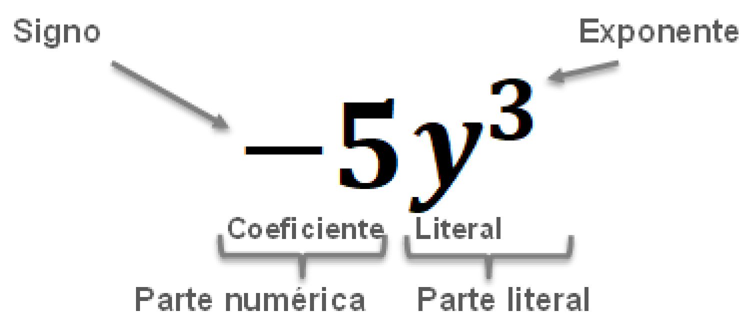
Signos diferentes se restan y se deja el signo del valor mayor

Multiplicación		
$(+)\times(+)$	=	+
$(-)\times(-)$	=	+
$(+)\times(-)$	=	–
$(-)\times(+)$	=	–

División		
$(+)\div(+)$	=	+
$(-)\div(-)$	=	+
$(+)\div(-)$	=	–
$(-)\div(+)$	=	–

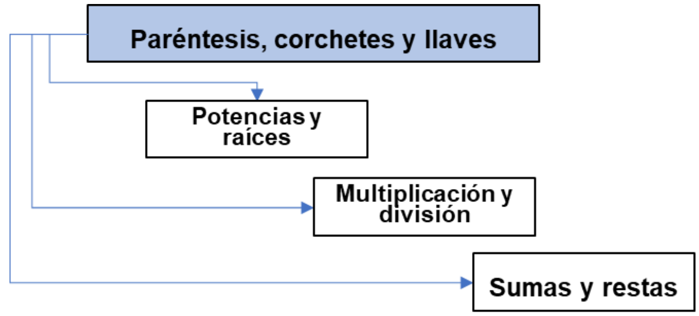
Termino algebraico

En general el termino algebraico es el producto y/o división de una o más variables (factor literal) y un coeficiente o factor numérico.



Jerarquía de operaciones

Se refiere a que orden de operaciones deben efectuarse de acuerdo con el orden siguiente:



Actividades de Apertura

Hasta ahorita hemos definido qué son los términos algebraicos, los signos de agrupación, las leyes de los signos y la jerarquía de las operaciones. En los siguientes ejemplos trabajaremos únicamente con la jerarquía operaciones en números, la jerarquía de operaciones algebraicas la revisaremos más adelante.

a) $-9+3(-10+21)-32=$

Solución: $-9+3(-10+21)-32=$

Comenzamos con las operaciones dentro de los paréntesis: $-9+3(\quad +11 \quad)-32=$

Para quitar los paréntesis se multiplica por el elemento de afuera: $-9+33 \quad -32=$

Realizamos las operaciones resultantes $=-8$

b) $2+[-2-3(2-7)-4]+12=$

Solución: $2+[-2-3(2-7)-4]+12=$

Comenzamos con las operaciones dentro de los paréntesis $2+[-2-3(\quad -5 \quad)-4]+12=$

Para quitar los paréntesis se multiplica por el elemento de afuera $2+[-2+15-4]+12$

Realizamos las operaciones dentro de los corchetes $2+[\quad +9 \quad]+12=$

Para quitar los corchetes multiplicamos por el elemento de afuera $2+\quad 9 \quad +12=$

Realizamos las operaciones resultantes $=23$

c) $8\{3+7[5-5(1+2)]-2+4(3+2)\}=$

Solución:

Comenzamos con los paréntesis $8\{3+7[5-5(1+2)]-2+4(3+2)\}=$

Resolveremos las operaciones de los paréntesis $8\{3+7[5-5(\ \ 3\ \ )]-2+4(\ \ 5\ \ )\}=$

Se continúan con los paréntesis $8\{3+7[5-\ \ 15\ \ \ ]-2+\ \ 20\ \ \ \}=$

El paréntesis multiplica con lo más cercano $8\{3+7[\ \ -10\ \ \ ]+\ \ 18\ \ \ \}=$

Se resuelven los corchetes $8\{3\ -70\ \ \ +\ \ 18\ \ \ \}=$

Se resuelven las operaciones dentro de los corchetes $8\{\ \ -49\ \ \ \}=$

Realizamos las operaciones resultantes $=-392$

Actividades de Desarrollo

En el siguiente ejercicio identificarás los elementos de los términos algebraicos (signo, coeficiente, literal y exponente) en los espacios correspondientes. Considera que, si no existe un signo explícitamente, lo deberás indicar como positivo (+):

a) $-21x^3w^7$ Signo: _–_____Coeficiente: _21___Literales: _x, w___ Exponentes: _3 , 7_

b) $-7b^5$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

c) $8a^2b^5$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

d) $\frac{4}{7}m^{11}$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

e) $\frac{1}{3}xyw^5$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

f) $\frac{9}{11}ayb$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

e) $\frac{1}{3}xyw^5$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

e) $\frac{1}{3}xyw^5$ Signo: ______Coeficiente:______Literales:_______Exponentes: _______

Actividades de Cierre

Es importante conocer los elementos que conformar un término algebraico porque en temas posteriores se retomarán para explicar algunos procedimientos o clasificaciones de los términos surgidos a partir de los elementos algebraicos y tú debes de ser capaz de identificarlos sin problema. Para ayudarte a dominar esta identificación de términos algebraicos te recomendamos la siguiente actividad:

I. Resuelve los siguientes ejercicios y preguntas de acuerdo con los temas revisados de términos algebraicos y leyes de signos:

1. En la expresión $-13b^3$ ¿cuál es su coeficiente?

2. Siguiendo la ley de los signos ¿qué signo obtenemos al multiplicar dos signos iguales?

3. En la expresión $-\frac{7}{2}a^{11}$ ¿cuál es su exponente?

4. Resuelve: $2 + [4 - 3(3 - 6) - 4] + 10 =$

5. Resuelve: $2 + [-2 - 3(2 - 7) - 4] + 12 =$

6. Resuelve: $11 + 3\{5[-1 - 3(2 - 6) - 3] + 12\} - 1 =$

7. Siguiendo la ley de los signos ¿qué signo obtenemos al multiplicar dos signos diferentes?

8. En la expresión $-\frac{7}{2}a^{11}$ ¿cuál es su coeficiente

Actividades de Contextualización o Transversalidad

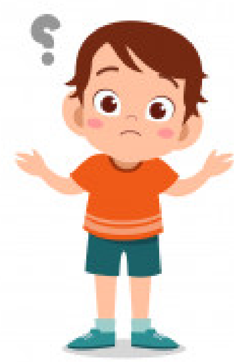
Resolver el siguiente ejercicio:

Rosa es mi tía, tiene un canal de YouTube donde platica a sus seguidores las experiencias de sus viajes, así como también la cultura y tradiciones de los lugares que visita. La semana pasada viajó a Guatemala (del náhuatl Quautlemallan “lugar de muchos árboles”), este país es nuestro vecino, se encuentra entre el Pacífico y el Caribe, ahí puedes encontrar volcanes, bosques tropicales y antiguos sitios mayas. La naturaleza exuberante, la hospitalidad de su gente, el colorido de sus fiestas, las lagunas, los volcanes y el mar, así como sus arraigadas tradiciones y apego a los modos de vida de sus ancestros son en sí mismos un enorme atractivo.

Para recorrer los lugares, mi tía rentó una camioneta, La moneda que utilizan en este país es el Quetzal. Haciendo la conversión a pesos mexicanos, el costo de alquilar la camioneta fue de $30 pesos por día, más $0.5 pesos por kilómetro recorrido. Mi tía rentó una camioneta por dos días y tuvo que pagar $360 pesos en total. ¿Cuántos kilómetros recorrió mi tía?

1.2.2 Expresión algebraica (términos semejantes, clasificación y grados de expresiones)

Introducción



Se dice que dos o más términos son semejantes, cuando tienen la misma parte literal, es decir, cuando tienen iguales letras con iguales exponentes.

- El término “$3x^2y$” y el término “$2x^2y$” son semejantes porque tienen factores literales (letras y exponentes) iguales, aunque el número o coeficiente sea distinto.

- Algunos ejemplos son:

1) $2a \quad y \quad a$ 2)$-5a^3b^2 \quad y \quad -8a^3b^2$ 3) $x^{m+1} \quad y \quad 3x^{m+1}$.

- Los términos $4ab\ y - 6a^2b$ no son semejantes porque, aunque tienen literales iguales, no tienen el mismo exponente, ya que la a del primero tiene de exponente 1 y la a del segundo tiene de exponente 2.
- Los términos $-bx^4\ y\ ab^4$ no son semejantes, porque, aunque tienen el mismo exponente, las literales no son iguales.

Ejemplo: $3ab, -5a^2b, a^2b^2, 8ab^2$ ninguno es semejante aunque tengan las mismas literales.

El término nulo es todo aquel término que tiene como coeficiente o número el cero.

$3x^3 + 0x^2 – 3x + 8$

A los polinomios que intervienen en una división, siempre será necesario agregarle los términos nulos correspondientes al grado de los términos faltantes, para que el polinomio este ordenado y completo, aunque no tendrá valor, sólo representación de orden de las literales o letras con su exponente. Recordando que cualquier cantidad multiplicada por cero su resultado es cero y por lo tanto la expresión original no cambia.

Términos semejantes:

$5a - 3a = 2a$ ← término semejante

$6n - 4m = 6n - 4m$ ← no son términos semejantes

$7x + 2x = 9x$ ← término semejante

$8a - 3b = 8a - 3b$ ← no son términos semejante

$12ax + 2ay = 12ax + 2ay$ ← no son términos semejantes

Actividades de Apertura

Clasificación de las expresiones algebraicas:

a) Monomio: Es una expresión algebraica que consta de un solo término algebraico. Ejemplos:

$3a, \ -5b,$, $5x^2$, yz^4, $5\,x^2yz^4$

b) Binomio: es un polinomio que consta de dos términos algebraicos. Ejemplos:

$a + b, \ x - y \ , \frac{a^2}{3} - \frac{5mx^4}{6b^2}, \ p + q^3, \ 7\sqrt{xy} + y^5$

c) Trinomio: es un polinomio que consta de tres términos algebraicos. Ejemplos:

$a + b + c, \quad x^2 - 5x + 6, \quad 5x^2 - 6y^3 + \frac{a^2}{3}, \ x^2 + 3x - 5$

d) Polinomio: Es una expresión algebraica que consta de más de un término algebraico. Ejemplos:

$a + b$, $a + x - y$, $x^3 + 2x^2 + x + 7$, $-4x^3 + 5x^2yz^4 - 3x + 7$

Grado de un polinomio: puede ser absoluto y con relación a una letra.

a) Grado absoluto de un polinomio es el grado de su término de mayor grado.

Así, en el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado; y el último, de primer grado; luego, el grado absoluto de primer polinomio es el cuarto.

- $4x^2\,y^3 + 3xy^4 - 2x^4\,y^2$ son 5 primer término, 5 segundo término y 6 tercer término, respectivamente, por consiguiente, el grado absoluto del polinomio es 6.
- $4x^2w - w^8x^2$ es un polinomio de grado absoluto es 10, porque la suma de los exponentes de las variables del 2do término es 10.

b) Grado relativo: a una letra, es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio.

- $a^6 + a^4x^2 - a^2x^4$ es de sexto grado del polinomio con la relación a la *a* y de cuarto grado con relación a la *x.*
- $3a^3b^2 - 7ab + 6\ a^4b^3 - 9\ a^2b$ es de cuarto grado del polinomio con respecto "a" y es de tercer grado del polinomio con respecto a "b"
- $x^4 + 3x^3 - 8xy^3 - 7x^2y^5 + 2x^2y^4$ es de cuarto grado del polinomio con respecto a "x" y es de quinto grado del polinomio con respecto a "y"

Expresión algebraica	Coeficientes	Tipo de expresión	Variables	Grado absoluto	Grado relativo a x	Grado relativo a y	Grado relativo a xy
$2xy^2$	2	Monomio	x, y	1 + 2=3	1	2	3
$-(4/3)\ y^5$	-4/3	Monomio	y	5	0	5	5
6	6	Monomio	No hay	0	0	0	0
$4x^3y^2 + 3x^2y^3$	4, 3	Binomio	x, y, z	3+2=5	3	3	5
$2zy - 6x^2z + xy^4$	2, -6, 1	Trinomio	x, y, z	1+4=5	2	4	5
$8x^4 - 7x^2 + (2/3)x - 5$	8, -7, 2, -5	Polinomio	X	4	4	0	4

Actividades de Desarrollo

Completa la siguiente tabla con los elementos faltantes:

Expresión algebraica	Coeficientes	Tipo de expresión	Variables	Grado absoluto	Grado relativo a x	Grado relativo a y	Grado relativo a xy
$6xy^2 + 5x^5$							
$8x^7 - 2y^5$							
$6x$							
$-x^3 + 2x^2y^3 - y^6$							
$y - x^2z - xy^4$							

Actividades de Cierre

Actividad 1: Anota la respuesta correcta con color rojo en cada rectángulo vacío.

Expresión algebraica	Grado absoluto de la expresión	Número de términos
$2x-5y^3$		
$\frac{x^2y^3}{5}$		
$x^2+y^3-z+xy^2z^3$		
$2x^2-3y^3+5x^2y^3z^2$		

Actividad 2: En el siguiente cuadro, dibuja un círculo con un mismo color cada término semejante, sí hay más términos semejantes, utiliza otros colores.

$2\ pq^5$	$3.3\ p^5q$	$-\frac{6}{5}x^3$	$0.6\ ab^2$	$3\ y^2$
$-1.5p^5q$	$-x^3$	$33\ y^2$	$3.5\ pq^5$	$-\frac{1}{2}\ ab^2$
$1.8y^2$	$\frac{3}{4}\ pq^5$	$-3\ x^3$	$-15x^3$	$18\ p^5q$
$2\ y^2$	$-14\ ab^2$	$\frac{6}{5}\ pq^5$	$3.5\ ab^2$	$\frac{3}{4}y^2$

Actividad 4: Resuelve y determina el grado del polinomio de las siguientes expresiones, escribe tu respuesta con color rojo:

1. $6x^3y + 2x^2y$

Relativo a x: ________________________________

Relativo a y: ________________________________

Grado absoluto: ______________________________

2. $3x^2 + 2x^2 – 3x$

Relativo a x: ________________________________

Relativo a y: ________________________________

Grado absoluto: ______________________________

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Debido a la contingencia de salud pública que vivimos actualmente, mi abuelita y yo nos hemos pasado toda esta semana viendo videos de YouTube, sobre todo el canal de “Luisito Comunica” y “De pisa y corre” porque son muy divertidos.

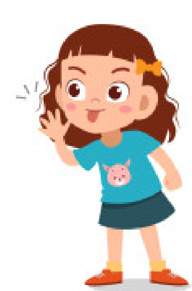
Ayer en la noche mi papá, al llegar del trabajo se enojó conmigo, ya que mi mamá le contó que me pasaba demasiado tiempo viendo videos en lugar de estudiar Matemáticas. Mi papá me mostró el siguiente reporte que le hizo mi mamá:

El martes vio 2 horas más de videos del canal de “Luisito Comunica” que el lunes: el miércoles el mismo tiempo que el lunes, el jueves y viernes el mismo tiempo que el martes y sábado y domingo una hora menos que el lunes.

El canal “De pisa y corre” fue visto el martes y miércoles el mismo número de horas, el lunes una hora menos que el martes, el jueves el doble de horas que el lunes; el viernes, dos horas más que el lunes y sábado y domingo no vio dicho canal.

Para que repasara matemáticas, mi papá me dijo que expresará algebraicamente el tiempo total de la semana que pasé viendo videos. Para ello, me pidió que llenara la siguiente tabla, considerando la x e y presentes, como el tiempo pasado viendo el canal mostrado, en ese día. En base al reporte hecho por mi mamá, yo debía llenar los tiempos correspondientes a cada día y canal faltantes, ´para luego obtener la expresión algebraica del número total de horas que dedico a la semana viendo videos conectado a internet.

DIA DE LA SEMANA	HORAS EN “LUISITO COMUNICA”	HORAS EN “DE PISA Y CORRE”
LUNES	x	
MARTES		y
MIÉRCOLES		



JUEVES		
VIERNES		
SÁBADO		0
DOMINGO		0

Con la información de la tabla completa, determina lo que se te pide:

Expresión algebraica (sin reducción): ____

Polinomio resultante (después de reducir términos semejantes): ___________________

Grado con respecto a “x”: ___________________________________

Grado con respecto a “y” ___________________________________

Actividad 1: Clasifica los siguientes términos algebraicos.

Termino algebraico	**Coeficiente**	**Variables**	**Grado absoluto**	**Grado del monomio con respecto a x**
1. $3x^2y$				
2. m				
3. mx^3				
4. 3xb^5				
5. $8x^3y^2z^4$				

1.3 Evaluación numérica de expresiones algebraicas

La evaluación numérica de las expresiones algebraicas se puede utilizar para resolver distintos problemas de tu entorno social. Por lo tanto, cuando en una expresión algebraica sustituimos una variable por un número, se dice que la evaluamos; primeramente, asignamos valores, es decir, números o términos algebraicos constantes, a las variables de la expresión; después resolvemos las operaciones y obtenemos un resultado.

1.3.1 Evaluar expresiones algebraicas para diferentes valores numéricos.

Introducción

La evaluación de expresiones algebraicas es el proceso de sustituir los valores numéricos asignados para las variables de una expresión algebraica y resolver las operaciones que resulten de estas sustituciones a continuación ponemos algunos ejemplos.

Debido a que las expresiones algebraicas representan el valor de una magnitud de interés en el momento de resolver un problema es necesario determinar su valor para las condiciones dadas o requeridas.

Actividades de Apertura

Ejemplo 1: evaluemos la expresión a - 2b + 3ac; para los valores de a = 4, b = - 1 y c = 2

a) 26 b) 22 c) 28 d) 30

Solución: Primero sustituimos el valor de **a** que es igual a 4, la letra **b** por -1; y la letra por **c**.

a - 2b + 3ac =

4 – 2 (-1) + 3 (4)(2) =

De modo que resolvemos las operaciones: 4 +2 +24 = 30

La respuesta es “d”.

Para la resolución de este tipo de expresiones algebraicas se utilizan la ley de los signos.

Operación	Primer caso	Segundo caso	Tercer caso	Cuarto caso
Suma/Resta	+8 +4 = +12	-8 -4 = -12	-8 +4 = -4	+8 -4 = +4
Multiplicación	(+8) (+4)=+32	(-8) (-4)=+32	(-8) (+4)=-32	(+8) (-4)=-32
División	+8 /+4= +2	-8 /-4= +2	-8/ +4= -2	+8/ -4= -2

Ejemplo 2: Si tienes un resistor desconocido conectado a una batería y midiendo tiene un voltaje E = 12 volts y la corriente es de I = 3 amperes, siendo la expresión algebraica: R = E/I ¿cuánto vale la resistencia del resistor(R)?

a) 4 b)2 c) 3 d) 9

Solución: Sustituimos el valor de (E) igual a 12, y tenemos que (I) es igual a 3. R=12 /3= 4 Ohms

---

Ejemplo 3: Expresa 25 ºC (Celsius) como una temperatura en grados Fahrenheit (^{0}F) usando la expresión algebraica: ^{0}F = 9/5 ºC + 32

a) 87 ^{0}F b) 100 ^{0}F c) 77 ^{0}F d) 50 ^{0}F

Solución: Sustituyendo el valor de ºC que es igual a 25. ^{0}F = 9/5 (25) + 32 = 77 ^{0}F

Ejemplo 4: Evalúa la expresión algebraica siguiente: $\frac{a^2+4a+8}{a^2+3a+2}$; cuando a = 1.

a) 2 b) 3 c) 6 d) 4

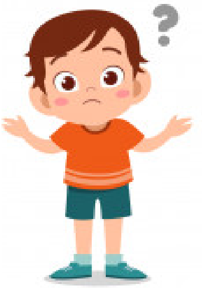
Solución: Sustituyendo el valor de (a) que es igual a 1. $\frac{(1)^2+4(1)+7}{(1)^2+3(1)+2} = \frac{1+4+7}{1+3+2} = \frac{12}{6} = 2$

Ejemplo 5: Valora la velocidad horizontal de una pelota lanzada en línea recta a partir de que la expresión algebraica de la velocidad es la siguiente: V = d / t; Cuando la distancia d = 10 metros y el tiempo es de t = 5 segundos.

a) 5 b) 1 c) 2 d) 4

Solución: Sustituyendo los valores de distancia d=10 y t =5. V = 10 / 5 = 2 m/s

Actividades de Desarrollo



Esperamos que hayas comprendido la evaluación numérica de las expresiones algebraicas de la Física, Química, y en otras ciencias; te proponemos la resolución de los siguientes problemas propuestos para la reafirmación de tu aprendizaje.

Problema 1: Evaluemos la expresión a - 4b + 5ac; para los valores de a = 1, b = - 2 y c = 3

a) 8 b) – 8 c) 9 d) 30

Problema 2: Si tienes una batería y midiendo tiene un voltaje E = 125 volts y la corriente es de I = 5 amperes, siendo la expresión algebraica: R = E/I ¿Cuánto vale la resistencia del resistor(R)?

a) 25 b)50 c) 75 d) 10

Problema 3: Expresa 30 ^{o}C (Celsius) como una temperatura en grados Fahrenheit (^{0}F) usando la expresión algebraica: ^{0}F = 9/5 ^{o}C + 32

a) 80 ^{0}F b) 86 ^{0}F c) 96 ^{0}F d) 76 ^{0}F

Problema 4: Evalúa la expresión algebraica siguiente: $\frac{a^2+4a+8}{a^2+3a+2}$; cuando a = 0.

a)2 b) 3 c) 4 d) 8

Problema 5: Valora la velocidad uniforme de un automóvil; cuando su distancia (d) es igual a 20 metros y cuando su tiempo (t) es igual a 2 segundos. La expresión algebraica de la velocidad es la siguiente: V = d / t;

a) 5 b) 7 c) 8 d) 10

Actividades de Cierre

Resuelve el siguiente problema de Física con ayuda de lo aprendido en este tema. Asegúrate de escribir tu procedimiento en el recuadro.

1. Determinar y valorar la densidad (ρ) de un trozo de plomo si tiene una masa (m) de 35 kilogramos y ocupa un volumen (v) de 0.3500 metros cúbicos. Su expresión algebraica es: ρ = m/v

a) 100 b) 35 c) 99 d) 34

Bloque 2 | Exponentes y radicales

2.1 Leyes de los Exponentes y Radicales

2.1.1 Leyes de los Exponentes

Introducción

En el libro *El hombre que calculaba*[1] se plantea la siguiente situación: el Califa de Bagdad le concede una petición al inventor del ajedrez y él solicita le entreguen los granos de trigo que se acumulen después de colocar un grano en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, etcétera, es decir, duplicando la cantidad en un cuadro respecto a la cantidad que aparece en el precedente y así sucesivamente hasta llegar al cuadro número 64 y último del tablero de ajedrez. Cuando los matemáticos del califa calcularon la cantidad de granos de trigo que esta petición representaba, la expresaron en los siguientes términos:

"*Sembrados todos los campos de la India, en 2000 siglos, no darían la cantidad de trigo que le has concedido al inventor*"

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	…..		…..		…..
…..		…..		…..		…..	
	…..		…..		…..		
…..		…..		…..		…..	
	…..		…..		…..		…..
…..		…..		…..		…..	
	…..		…..		…..		…..

Figura. Tablero de ajedrez con las potencias del número 2

Determinar y escribir un número extraordinariamente grande, es en la actualidad relativamente fácil si utilizamos una expresión exponencial; 2^{63} es la expresión que representa el número de granos de trigo en el enunciado anterior.

[1] *Tahan, Malba El hombre que calculaba, México, Noriega Editores*

En álgebra, frecuentemente nos encontramos con la multiplicación de un número por sí mismo varias veces; por ejemplo, al calcular el área de un cuadrado cuyo lado es *a* se presenta la situación mencionada, ya que el área es igual al producto *a•a*. El volumen de un cubo de lado b es igual a *b•b•b*.. Por surge la necesidad de abreviar este tipo de operaciones.

Definición de potencia de un número.

Si a representa un número real diferente de cero y n es un número natural, es decir:

$$a \in R \qquad a \neq 0, \; y \; n \in \mathbf{N}, \text{ entonces:}$$

$$a^n = a \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces } a}$$

Signo de las potencias

Cualquier potencia de una cantidad positiva evidentemente es positiva, porque sus factores serán positivos. Respecto a las potencias de una cantidad negativa tenemos las siguientes consideraciones:

1.- Toda potencia par de una cantidad o término negativo es positiva.

2.- Toda potencia impar de una cantidad o término negativo es negativa.

$$(-2a)^2 = (-2a)(-2a) = 4a^2$$

$$(-a)^3 = (-2a)(-2a)(-2a) = -8a^3$$

$$(-a)^4 = (-2a)(-2a)(-2a)(-2a) = 16a^4$$

Las potencias se utilizan en una variedad de situaciones, desde la representación de medidas astronómicas y atómicas en operaciones basadas en la notación científica, hasta la representación de relaciones de igualdad que se dan en el estudio de diversos problemas de las ciencias.

Los exponentes también pueden ser negativos y fraccionarios, por lo que es importante entender lo que significa, de tal manera que para su manejo es necesario conocer las "leyes de los exponentes", mismas que explican la forma de realizar las operaciones con potencias.

Actividades de Apertura

En este apartado vas a conocer las leyes fundamentales de los exponentes, así como aquellas que involucran a los radicales y por ende a los exponentes fraccionarios.

1a Ley: Potencia con exponente cero y base diferente de cero

Todo número con exponente 0 (es decir, elevado a cero) es igual a 1.

$$a^0 = 1 \qquad \text{con } a \neq 0$$

Por ejemplo: **a)** $a^0 = 1$ **b)** $(2x)^0 = 1$ **c)** $15^0 = 1$

2a Ley: Potencia con exponente igual a uno

Todo número con exponente 1 es igual a sí mismo.

$$a^1 = a$$

Por ejemplo: **a)** $a^1 = a$ **b)** $10^1 = 10$ **c)** $15^1 = 15$

3a Ley: Producto de potencias con la misma base

Cuando dos potencias de la misma base, se multiplican, su resultado es un término de la misma base y con un exponente igual a la suma de los exponentes de las potencias multiplicadas.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Por ejemplo:

a) $(x^4)\,(x^3) = x^{4+3} = x^7$

b) $(2m^5)\,(8m) = 16m^{5+1} = 16m^6$

c) $(b^{12})\,(3b^{-2}) = 3b^{12+(-2)} = 3b^{12-2} = 3b^{10}$

d) $(-\,4z^5)\,(5z^2)\,(z^2) = -20z^{5+2+2} = -20z^9$

e) $(p^{\frac{1}{4}})\,(p^{\frac{2}{5}}) = p^{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}} = p^{\frac{5+8}{20}} = p^{\frac{13}{20}}$ *

*Las leyes de los exponentes que estamos estudiando, aplican de la misma forma cuando se opera con exponentes fraccionarios.

4a Ley: Cociente de potencias con la misma base

Cuando dos potencias de la misma base, se dividen, su cociente es un término de la misma base y con un exponente igual a su diferencia de los exponentes de las potencias divididas.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Por ejemplo:

a) $\frac{n^4}{n^2} = n^{4-2} = n^2$

b) $\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$

c) $\frac{9y^6z^3}{3y^3z^2} = 3y^{(6-3)}\, z^{(3-2)} = 3y^3z$

d) $\frac{c^4}{c^4} = c^{4-4} = c^0 = 1$

5ta Ley: Potencia elevada a otra Potencia

Una potencia elevada a un número es igual a otra potencia de la misma base y cuyo exponente es igual al producto del exponente de la potencia por el número al que se eleva.

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

Si queremos calcular $(4^5)^3$ utilizamos el siguiente razonamiento:

$$(4^5)^3 = 4^5 * 4^5 * 4^5 = 4^{5+5+5} = 4^{5*3}$$

Por ejemplo:

a) $(x^3)^2 = x^{(3*2)} = x^6$

b) $(m^{-5})^3 = m^{(-5*3)} = m^{-15}$

c) $(2b^4)^2 = 2^2 * b^{(4*2)} = 4b^8$

d) $(y^{\frac{1}{4}})^3 = y^{(\frac{1}{4}*3)} = y^{\frac{3}{4}}$

6ta Ley: Potencia de un producto

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

$$(a * b * c)^n = a^n * b^n * c^n$$

Por ejemplo, al realizar la siguiente operación: $(5*3)^{3,}$ observamos que

$$(5*3)^3 = (5*3) * (5*3) * (5*3) = (5*5*5) * (3*3*3) = 5^3 * 3^3$$

Por ejemplo:

a) $(x.y.z)^2 = x^2y^2z^2$

b) $(m.n.o.p)^5 = m^5n^5o^5p^5$

c) $(2b^4c)^2 = 2^2 * b^{(4*2)} * c^{(1*2)} = 4b^8c^2$

d) $(x^3y^{\frac{1}{2}})^4 = x^{(3*4)}\, y^{(\frac{1}{2}*4)} = x^{12}y^{\frac{4}{2}} = x^{12}y^2$

7ma Ley: Potencia de una fracción

También se conoce como la ley distributiva de la potenciación respecto de la división exacta. Para elevar una fracción a una potencia, se eleva su numerador y su denominador a dicha potencia de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Por ejemplo:

a) $(\frac{3}{4})^4 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$

En caso de que te encuentres con una fracción mixta se transforma el numero a fracción:

b) $(3\frac{1}{2})^2 = (\frac{7}{2})^2 = \frac{7x7}{2x2} = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$

c) $(\frac{x}{y})^5 = \frac{x^5}{y^5}$

d) $(\frac{2ab}{c})^3 = \frac{2^3a^3b^3}{c^3} = \frac{8a^3b^3}{c^3}$

8va Ley: Potencia con exponente negativo

Todo término elevado a un exponente negativo es igual a una fracción, cuyo numerador es la unidad y su denominador es el mismo término con el exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo:

a) $n^{-3} = \frac{1}{n^3}$

b) $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

c) $3m^{-7} = 3.\frac{1}{m^7} = \frac{3}{m^7}$

d) $a.b^{-5} = a.\frac{1}{b^5} = \frac{a}{b^5}$

9na Ley: Potencia con exponente positivo

Todo término elevado a un exponente positivo es igual a una fracción, cuyo numerador es la unidad y su denominador es el mismo término con el exponente negativo.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Por ejemplo:

a) $z^8 = \frac{1}{z^{-8}}$

b) $x^9 = \frac{1}{x^{-9}}$

c) $5m^2 = 5.\frac{1}{m^{-2}} = \frac{5}{m^{-2}}$

d) $a^4b^3 = \frac{1}{a^{-4}b^{-3}}$

10ma Ley: Potencia negativa de una fracción

Si tenemos una fracción elevada a una potencia negativa, para quitar el exponente negativo, invertimos la fracción.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

¿Por qué podemos hacer esto?, si tenemos un número entero con exponente negativo, lo colocamos debajo de un número uno, como lo vimos en leyes anteriores.

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

Por ejemplo:

a) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2}$ **b)** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \left(\frac{y}{x}\right)^{3}$ **c)** $\left(\frac{mn}{p}\right)^{-6} = \left(\frac{p}{mn}\right)^{6}$ **d)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

11va Ley: Exponentes fraccionarios

Provienen de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente del término radicando se divide por el índice de la raíz; si el cociente no es una cantidad entera, la división solo queda indicada, dando lugar al exponente fraccionario.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Lo anteriormente expuesto se puede expresar: $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Por ejemplo:

a) $\sqrt[4]{b^3} = b^{\frac{3}{4}}$ **b)** $\sqrt{y^8} = y^{\frac{8}{2}} = y^4$ **c)** $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$

d) $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x^6}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{6}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}} = x^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{x}}$

Actividades de Desarrollo

Con las leyes antes descritas y apoyándote en los ejemplos desarrollados para cada caso, resuelve los siguientes ejercicios, de esta forma te familiarizaras más con estás leyes que te serán de gran utilidad en todos los temas que requieran de operaciones algebraicas.

1.- Desarrolla las potencias y aplica las leyes de los exponentes, para resolver los siguientes ejercicios.

a) $3^4 =$	**b)** $(-5)^5 =$	**c)** $6^3 =$
d) $x^0 =$	**e)** $265^0 =$	**f)** $(2m+3)^0 =$
g) $m^1 =$	**h)** $95^1 =$	**i)** $(t+5)^1 =$
j) $\frac{6^0}{3^1} + 5^0 =$	**k)** $4x^0 + x^1 + 5 =$	**l)** $\frac{20^1}{5^1} + 12^0 - 6^1 * 3^0 =$

2.- Aplica las leyes de los exponentes correspondientes al producto y cociente de mismas para resolver los siguientes ejercicios.

a) $(a^2)(a^3) =$ **b)** $(x^6)(x^{-4}) =$ **c)** $(2^3)(2^7)(2^{15})=$

d) $(a^8)(a^{-6})(a^{10})=$ **e)** $(5a^2b^2)(2ab^2c^3)=$ **f)** $(-7m^2n^3)(3mn^9)=$

g) $\frac{5n^6}{11n^3}=$ **h)** $\frac{8a^6b^3c^7}{4a^3b^3c^4}=$ **i)** $\frac{-6x^5}{-3x^8}=$

3.- Aplica las leyes de los exponentes de potencia elevada a otra potencia y de producto, para simplificar los siguientes ejercicios.

a) $(2^3)^7=$ **b)** $(3^3)^{-2}=$ **c)** $(b^3)^4 =$

d) $((x^2)^3)^4 =$ **e)** $(4x^{\frac{3}{5}})^2=$ **f)** $(3*4*2)^5=$

g) $(a^3b^5c^{-4})^2=$ **h)** $(2x^5)^3(-5x^2)^2 =$ **i)** $(3y^{\frac{2}{3}})^3(2y^2)^2 =$

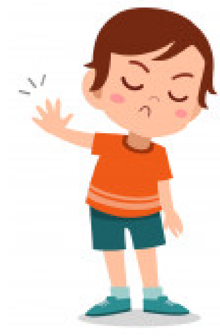
j) Selecciona, ¿Cuál de las siguientes expresiones es siempre igual a $(p^{n-m-1})^2, con\ p \neq 0$?

1) $\frac{p^{n^2}}{p^{m+1^2}}$ 2) $p^{2(n-m-1)}$ 3) $p^{n^2-m^2-1}$ 4) $p^{(n-m-1)^2}$

4.- Aplica las leyes de los exponentes de la potencia de fracciones, para resolver los siguientes ejercicios.

a) $(\frac{1}{4})^5 =$ **b)** $(\frac{1}{2m})^3 =$

c) $(\frac{5}{3})^2 * (\frac{2}{3})^2 =$ **d)** $(\frac{2ab}{3c^3})^2 =$

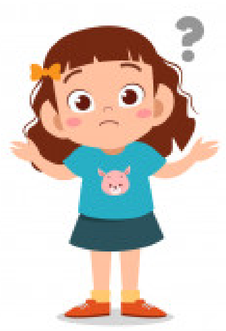


Potencia	Fracción
a) $m^{-4} =$	
b) $2k^{-3} =$	
c) $a^{-4}b = =$	
d) $m^{-1}n^{-2} =$	

5.- Completa la siguiente tabla. Para ello recuerda que existen los exponentes fraccionarios y aplica la igualdad: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Expresar con signo radical	Expresar con exponente fraccionario
	$x^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{x^5}$	
	$y^{\frac{5}{6}}$
$\sqrt[6]{a^5b^4}$	
	$\frac{(2xy)^{\frac{4}{3}}}{(9x)^{\frac{4}{3}}}$
$\sqrt[4]{\frac{x^7y^{12}}{125x}}$	

Actividades de Cierre



Como habrás notado, las leyes de los exponentes tienen mucha aplicación en la simplificación de expresiones algebraicas, es decir en la reducción de términos algebraicos y en muchos casos se requiere de la aplicación de más de una ley de los exponentes.

Por ello en esta sección nos enfocaremos en la “Simplificación de operaciones con potencias”, en las que se requiere de la aplicación de varias leyes de los exponentes, así como de la operación con exponentes fraccionarios.

1. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas.

Operación	Simplificación
a) $(5ax^2)\ (a^2x^3)\ (6ax) =$	
b) $(9a^3b^4c)^2 .\ (2a^2b^3)^3 .\ (ac) =$	
c) $\left(\frac{2}{b^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{b^2}\right)^2 =$	
d) $\frac{(-2m^2n^5)^4}{(12m^3n^5)^3} =$	
e) $\left(\frac{2p}{3q^2r^3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{p^3r^2}{q^4}\right)^2 =$	
f) $\frac{9^{3n}y^{m+4}}{9^{2n}y^m} =$	

2.- Resuelve los siguientes ejercicios en tu libreta, opera y simplifica las expresiones que se te presentan, empleando las propiedades de exponentes fraccionarios. Expresa tus resultados con exponentes positivos.

a) Expresar con signo radical:

1) $4a^{\frac{3}{4}} =$ 2) $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{2}{5}} =$ 3) $4a^2b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{5}{6}} =$

b) Expresar con exponente fraccionario:

1) $\sqrt{a^3}\sqrt{b^5}=$ 2) $4\sqrt[4]{ab^5c^6}=$ 3) $\sqrt[m]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[3]{c^x}=$

c) Expresar como exponente positivo:

$$5x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{1}{2}}$$

d) Hallar el valor de:

1) $16^{\frac{3}{2}} =$ 2) $81^{\frac{3}{4}} =$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Con lo que ahora sabes y has aprendido estás en posibilidad de darle aplicación a las leyes de los exponentes. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

1.- Problema Para preparar una mezcla de mortero se requieren 8^{-1} toneladas de cemento, ¿Cuánto kilogramos de cemento se emplearán?

2.- Problema. Si 10 gramos de sal se añaden a una cantidad de agua, la cantidad k(t) de sal que no se disuelve después de t minutos está dada por $k(t) = 10 * (\frac{1}{2})^t$

a). ¿Cuál es la cantidad de sal sin disolver en el agua después de transcurrir 3 minutos?

b). Después de añadir sal en el agua, ¿en qué tiempo quedan solo 5 gramos sin disolver?

2.1.2 Leyes de los Radicales

Introducción

La operación de radicación es la operación inversa a la potenciación, es decir, si se tiene el resultado de una potencia, la obtención de la raíz permite encontrar el número que se elevó al exponente igual al índice de la raíz.

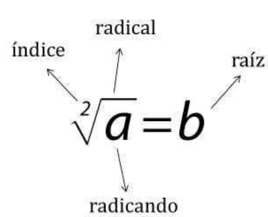
Sabemos que $3^2 = 9$ es el resultado de una potencia, entonces. Si necesitamos saber que número se elevó al cuadrado para obtener 9, ese valor es el resultado de la raíz cuadrada de 9.

$$\sqrt{9} = 3$$

Si queremos saber qué número debemos elevar al cubo para obtener 8, escribimos:
$\sqrt[3]{8}$, lo cual se lee: “raíz cúbica de 8” y significa: “que número elevado al cubo da como resultado 8”, entonces, $\sqrt[3]{8}$ =2, porque $2^3 = 8$.

Para comprender mejor está operación, es necesario tener en claro los términos de la radicación, estos son el radicando, el índice y la raíz:

• El radicando es el número o expresión al cual queremos hallar su raíz.
• El índice nos indica cuantas veces debemos multiplicar por sí mismo un número o término para así obtener el radicando.
• La raíz es aquel número o término que si se multiplica por sí mismo las veces que indica el índice, da como resultado el radicando.



La raíz n-ésima:

Así como la raíz cuadrada es lo que se multiplica dos veces para tener el valor original...
y la raíz cúbica es lo que se multiplica tres veces para tener el valor original... la raíz n-ésima es lo que se multiplica n veces para tener el valor original

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \ldots \times \sqrt[n]{}}_{n\ de\ ellos}$$

En el caso de la raíz cuadrada se puede expresar con índice o sin índice. (Solo se aplica a la raíz cuadrada)

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$$ Raíz cuadrada de a

Sin embargo, cuando se trata de raíces que NO son raíces cuadradas, SIEMPRE se deberá escribir el índice:

$\sqrt[3]{y}$ □ raíz cúbica de y

$\sqrt[5]{x}$ □ raíz quinta de x

Si la raíz indicada es exacta, se dice que es racional; si no es exacta, es irracional. Por ejemplo, $\sqrt{4} = 2,\ \sqrt[3]{8a^3} = 2a,\ \sqrt[4]{16a^8} = 2a^2$ son expresiones racionales; mientras que $\sqrt{2} = 1.4142 \ldots$ y $\sqrt[3]{3a^2}$, son irracionales.

Signo de una raíz:

a) Las raíces impares de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad del radicando. Así:

$$\sqrt[3]{27a^3} = 3a \quad \text{porque} \quad (3a)^3 = 27\ a^3$$

$$\sqrt[3]{-27a^3} = -3a \quad \text{porque} \quad (-3a)^3 = -27\ a^3$$

Recuerda la ley de signos: $(-3a)^3 = (-3a)\ (-3a)\ (-3a) = -27\ a^3$

b).- Las raíces pares de una cantidad positiva tienen doble signo: + y –. Así, tenemos:

$\sqrt{25x^2}=5x$ ó $\sqrt{25x^2}=-5x$ porque $(5x)^2=25x^2$ y $(-5x)^2=25x^2$

Por tanto, $\sqrt{25x^2}=\pm 5x$

$\sqrt[4]{16a^4}=2a$ ó $\sqrt[4]{16a^4}=-2a$ porque $(2a)^4=16a^4$ y $(-2a)^4=-16a^4$

Por tanto, $\sqrt[4]{16a^4}=\pm 2a$

A continuación, se presentan las propiedades de las raíces y comprenderás su importancia para la solución de diversos ejercicios el estudio del álgebra. No olvides los puntos revisados en esta breve introducción.

Actividades de Apertura

En este apartado vas a conocer las propiedades de los radicales. Debido a que las raíces pueden convertirse a potencias de exponente fraccionario, cumplen con todas las propiedades de potencias a partir de las cuales se pueden deducir las siguientes.

1a Propiedad: Raíz de una potencia cuyo exponente es igual al índice

Cuando el exponente del radicando es igual al índice, la raíz es el radicando con exponente uno.

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{x^3}=x^{\frac{3}{3}}=x$

b) $\sqrt[7]{5^7}=5^{\frac{7}{7}}=5$

c) $\sqrt[12]{x^7x^5}=\sqrt[12]{x^{7+5}}=\sqrt[12]{x^{12}}=x^{\frac{12}{12}}=x$

d) En algunos casos, es necesario simplificar el radicando con las leyes de los exponentes.

$$\sqrt[6]{\frac{(16^2 2^{-5})^3}{8^2 2^{-3}}}=\sqrt[6]{\frac{((2^4)^2 2^{-5})^3}{(2^3)^2 2^{-3}}}=\sqrt[6]{\frac{(2^8 2^{-5})^3}{2^6 2^{-3}}}=\sqrt[6]{\frac{(2^{8-5})^3}{2^{6-3}}}=\sqrt[6]{\frac{(2^3)^3}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{2^9}{2^3}}=$$

$$\sqrt[6]{2^{9-3}}=\sqrt[6]{2^6}=2$$

Considera que 16 se puede escribir como 2^4y que 8 se puede escribir como 2^3. Como se pudo observar, ya sea que el radicando sea una variable o un valor numérico, la propiedad se cumple para ambos casos.

2a Propiedad: Raíz como potencia con exponente fraccionario

Se puede expresar cualquier potencia como raíz o viceversa, considerando a la potencia como un numero racional, el numerador de esta potencia corresponderá a la potencia del radicando y la del denominador al radical.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{2}{3}}$ **b)** $\sqrt[4]{6^7} = 6^{\frac{7}{4}}$ **c)** $\sqrt[3]{(2x+y)^5} = (2x+y)^{\frac{5}{3}}$

Recuerda que está propiedad también la estudiamos en las leyes de los exponentes. Esto nos demuestra la relación entre estas operaciones.

3a Propiedad: Producto de raíces con el mismo índice

Para multiplicar radicales de igual índice n, se multiplican los radicandos y se conserva el índice n.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplos:

a) $(\sqrt{8}).(\sqrt{2}).(\sqrt{6}) = \sqrt{8 * 2 * 6}$ **b)** $(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{z}) = \sqrt[3]{xyz}$

c) $(\sqrt[5]{3c})(\sqrt[5]{2d}) = \sqrt[5]{3c * 2d} = \sqrt[5]{6cd}$

4a Propiedad: Producto de raíces con distinto índice

La propiedad consiste en multiplicar los índices de los radicales para obtener un nuevo índice común *(nm)*; el nuevo radicando se obtiene del producto del primer radicando elevado a la potencia que indique el índice del segundo radical (a^m), por el radicando del segundo factor elevado a la potencia que indique el índice del primer radical (b^n).

$$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

Ejemplos:

a) Resolver la siguiente multiplicación de radicales:

$$\sqrt[4]{3} * \sqrt[3]{4}$$

Observamos que, para obtener el índice común del resultado, tendremos que multiplicar 4*3=**12**; después para obtener el nuevo radicando, se eleva el radicando del primer factor (este caso el 3), a la potencia que del índice el segundo radical **(**3^3) y se multiplicará por el radicando del segundo factor (este caso el 4), elevado a la potencia del índice del primer radical **(**4^4**).** Así tenemos que:

$$\sqrt[4]{3} * \sqrt[3]{4} = \sqrt[4*3]{(3^3)(4^4)} = \sqrt[12]{(3^3)(4^4)}$$

$$= \sqrt[12]{(27)(256)} = \sqrt[12]{(6912)}$$

b) Ejemplo con variables: aplicamos la propiedad y empleamos las leyes de los exponentes:

$$\sqrt[3]{2x} * \sqrt[5]{y} = \sqrt[15]{(2x)^5(y)^3}$$

$$\sqrt[15]{2^5x^5y^3} = \sqrt[15]{2^5x^5y^3}$$

$$\sqrt[15]{32x^5y^3}$$

5a Propiedad: Raíz de una raíz

Para obtener raíz de raíz se multiplican los índices y se conserva el radicando.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[(3)(4)]{x} = \sqrt[12]{x} = x^{\frac{1}{12}}$

Si analizamos un poco este ejercicio, nos podemos dar cuenta de que no es la única forma de resolverlo, ya que podríamos emplear la propiedad de exponentes fraccionarios:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$

b) En el siguiente ejemplo, primero es conveniente simplificar el radicando con el apoyo de las leyes de los exponentes.

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^4y^5z^{-3}}{x^4y^{-6}z^0}}} = \sqrt[3]{\sqrt{(x^{4-4}y^{5-(-6)}z^{-3-0})}} = \sqrt[3]{\sqrt{(x^0y^{11}z^{-3})}} = \sqrt[3.2]{(x^0y^{11}z^{-3})} = \sqrt[6]{(y^{11}z^{-3})}$$

6a Propiedad: Raíz de una fracción

La raíz n-enésima de un numero racional es igual a la división de las raíces n-enésima del denominador y numerador respectivamente.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} = 0.666\ldots$

b) En el siguiente ejemplo, aplicamos la raíz quinta, tanto para el numerador como para el denominador. Posteriormente podemos aplicar la propiedad de exponentes fraccionarios para simplificar más la fracción

$$\sqrt[5]{\frac{x^{10}}{y^{15}}} = \frac{\sqrt[5]{x^{10}}}{\sqrt[5]{y^{15}}} = \frac{x^{\frac{10}{5}}}{y^{\frac{15}{5}}} = \frac{x^2}{y^3}$$

c) Revisa cuidadosamente la solución del siguiente ejemplo. Aplicaremos la propiedad que estamos estudiando, pero también recurriremos dos de las propiedades anteriores (la del producto de 2 raíces con el mismo índice y la de exponentes fraccionarios).

$$\sqrt{\frac{4x^2}{36y^4}} = \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{36y^4}} = \frac{\sqrt{4}\,\sqrt{x^2}}{\sqrt{36}\,\sqrt{y^4}} = \frac{2x^{\frac{2}{2}}}{6y^{\frac{4}{2}}} = \frac{x}{3y^2}$$

7ma Propiedad: Cociente de raíces con distinto índice

La propiedad consiste en multiplicar los índices de los radicales del numerador *(n)* y denominador *(m)* para obtener un nuevo índice común *(nm);* el nuevo radicando será la fracción resultante de elevar el radicando del numerador *(a)* a la potencia del índice del radical del denominador *(m)* y el radicando del denominador *(b)* se eleva a la potencia del índice del radical del numerador *(n)*.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n*m]{\frac{a^m}{b^n}}$$

Ejemplos:

a) Resolver la siguiente división de radicales:

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}}$$

Observamos que para obtener el índice común, tendremos que multiplicar 4*3=**12**; después para obtener el subradical, se eleva el radicando del numerador (en este caso el 3) a la potencia 3 que es el índice del radical del denominador **(**3^3); y se dividirá entre el radicando del denominador (en este caso el 4) elevado a la potencia 4 que es el índice del radical del numerador **(**4^4**).** Así tendremos que:

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4(3)]{\frac{3^3}{4^4}} = \sqrt[12]{\frac{3^3}{4^4}} = \sqrt[12]{\frac{27}{256}}$$

b) Revisemos un segundo ejemplo. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[2(3)]{\frac{25^3}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{15\,625}{729}} = \frac{\sqrt[6]{15625}}{\sqrt[6]{729}} = \frac{5}{3}$

c) Revisemos otro ejemplo. $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[5(3)]{\frac{(x^2)^3}{y^5}} = \sqrt[15]{\frac{x^6}{y^5}}$

Actividades de Desarrollo

Como pudiste comprobar las propiedades de las raíces nos permiten operar expresiones aritméticas y algebraicas en forma inmediata, al transformar una expresión algebraica que sea compleja en la forma equivalente más sencilla.

1.- Para comenzar, obtén las raíces indicadas, recuerda que la a raíz n-ésima es aquella cifra que multiplicada por si misma el número de veces que indica el índice del radical, dará como resultado el radicando. No olvides considerar los signos.

Radical	Raíz o raíces	Radical	Raíz o raíces
a) $\sqrt{64} =$		**e)** $\sqrt[5]{-32} =$	
b) $\sqrt[3]{125} =$		**f)** $\sqrt[4]{81} =$	
c) $\sqrt[4]{256} =$		**g)** $\sqrt[4]{625} =$	

2.- Aplica las primeras dos propiedades de las raíces y las leyes de los exponentes donde sea necesario para simplificar los radicandos.

1ª propiedad

a) $\sqrt[9]{x^9} =$

b) $\sqrt[7]{5^7} =$

c) $\sqrt[7]{x^2x^5} =$

d) $\sqrt[9]{2^8 2^{-5} 2^6} =$

e) $\sqrt{\dfrac{7^6}{7^4}} =$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{(7^4)^6}{7^8}} =$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{(6^{10})^2}{6^{-3}6^7}} =$

2ª propiedad

a) $\sqrt[11]{(3^{22})^3} =$

b) $\sqrt[12]{y^7} =$

c) $\sqrt[5]{m^3} =$

d) $\sqrt[7]{11^{14}} =$

e) $\sqrt[4]{z^{-6}z^{18}} =$

f) $\sqrt[7]{\dfrac{6^{11}}{6^3}} =$

3.- Realiza los siguientes productos de radicales con índices iguales o distintos. Aplica las propiedades correspondientes según sea el caso.

a) $(\sqrt[3]{4})\ (\sqrt[3]{5}\ ) =$

b) $(\sqrt[4]{x^2})\ (\sqrt[4]{xy^3}) =$

c) $(\sqrt[7]{2ab^5})\ (\sqrt[7]{5a^3b^2}) =$

d) $(\sqrt[5]{w^2})\ (\sqrt[4]{z^5}) =$

e) $(\sqrt[3]{3^2})\ (\sqrt[6]{2}\ ) =$

f) $(\sqrt[7]{2^2})\ (\sqrt[4]{6}) =$

g) $(\sqrt[4]{x^5})\ (\sqrt[3]{x^2}) =$

h) $(\sqrt[5]{w^2})\ (\sqrt[4]{z^5}) =$

4.- Simplifica las siguientes raíces de raíces en tu cuaderno. Consulta los ejemplos descritos en las actividades de apertura.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{4\sqrt[5]{16}}} =$

b) $\sqrt[6]{8\sqrt[4]{2}} =$

c) $\sqrt[6]{8\sqrt[4]{2}} =$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{64m^7n^{18}}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}\sqrt{3x^3y^2\sqrt[4]{\frac{2}{5}a^2x^3y}}} =$

f) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{((a^1(b^1c^2)(a^9b^2c^5)}{(a^2b^3c^1)^2}}}} =$

5.- Realiza los siguientes productos de radicales con índices iguales o distintos, en tu cuaderno. Aplica las propiedades correspondientes según sea el caso.

a) $\sqrt{\frac{64}{121}} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} =$

c) $\sqrt{\frac{4x^2}{6^4}} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{x^6}{x^{10}}} =$

e) $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[3]{64}} =$

Actividades de Cierre

1.- En los siguientes ejercicios opera y simplifica las expresiones que se te presentan, empleando las leyes de los exponentes y las propiedades de las raíces que consideres necesarias.

Expresión radical	**Simplificación**
a) $\sqrt[4]{z^{-6}z^{18}} =$	
b) $\sqrt[3]{\dfrac{((x^2)^3)^4}{x^{10}x^{-6}x^4}} =$	
c) $\sqrt{\dfrac{7^6}{7^4}} =$	
d) $\dfrac{\sqrt[6]{64}}{\sqrt[4]{256}} =$	
e) $\left(\sqrt{\dfrac{4x^2}{2^4}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{9x^4}{3^6}}\right) =$	
f) $(\sqrt{2ab^2})(\sqrt[4]{a^3b})=$	
g) $\sqrt[4]{\dfrac{x^{11}y^{16}z^{-5}}{x^{-9}z^{-13}(y^4)^2}} =$	
h) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{((x^{-3}y^{-2}z^{-3})(x^{-4}y^5z^{-2}))}}{(y^{-2}z^5)^2}}} =$	

Actividades de Contextualización o Transversalidad

1.- Resuelve el siguiente crucigrama aplicando las propiedades de las raíces y exponentes. Cada cifra del resultado ocupa una casilla.

1	2		3	
		4		5
6		7	8	
9			10	

Horizontales

1. $\sqrt[3]{1000}-\sqrt{4}=$ **3.** $4^{\frac{3}{2}}=$ **5.** $(2)\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)=$ **7.** $(2)(\sqrt[3]{2^2})$
$(\sqrt[3]{2^{13}})=$

9. $(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2})(\sqrt[5]{7^5})=$ **10.** $\left(\sqrt{\frac{3^2\cdot 5}{3}}\right)^2\cdot(\sqrt{3})^2=$

Verticales:

2. $4\sqrt{9}+5\sqrt{9}=$ **4.** $4\sqrt{2}\sqrt{8}=$ **6.** $\left(2\sqrt[3]{2^2}\right)^3=$ **8.** $\sqrt{121\sqrt{2^8}}=$

Bloque 3 | Suma, resta, multiplicación y división

3.1 Operaciones básicas con monomios y polinomios

3.1.1 Suma y resta

Introducción

Cuando se requiere resolver un problema enunciado en lenguaje común es necesario transformarlo a una expresión algebraica, ecuación o desigualdad. Las expresiones matemáticas que resultan, en muchas ocasiones deben de simplificarse y para ello deben realizarse las operaciones que representan. Es por ello que durante el desarrollo de las actividades del curso de álgebra y de las asignaturas de matemáticas del bachillerato es recurrente la aplicación de las operaciones básicas a expresiones algebraicas como un paso intermedio en la solución de ecuaciones.

Actividades de Apertura

Cuando se suman o restan expresiones algebraicas solo se pueden hacer estas operaciones con términos semejantes. Esto es una consecuencia de la regla de la aritmética que establece que solo se pueden sumar cantidades de la misma especie. Si dos términos no son semejantes no son de la misma especie y por tanto no pueden sumarse o restarse. Anteriormente ya se definieron los términos semejantes.

En una suma de expresiones algebraicas solo es necesario expresar los términos que las componen y luego debemos simplificar los términos semejantes. Cuando restamos expresiones, antes de simplificar debemos de cambiar el signo de todos los términos del polinomio que se va a restar (sustraendo). Recuerda también estas otras reglas.

1.- Ley de los signos:

Números con igual signo → se suman y prevalece el signo de ellos.

Números con diferente signo → se restan y prevalece el signo del número con mayor valor absoluto.

2**.- En suma y resta algebraica:** solo intervienen los coeficientes, los exponentes permanecen inalterables.

3.- **Es recomendable:** Asociar los términos que contengan el mismo signo, aplicando posteriormente el punto 1.

Siempre que se realizan operaciones con polinomios o expresiones algebraicas debemos simplificarlos antes de hacer las operaciones correspondientes.

Ejemplo 1: reduce los términos semejantes de la expresión :

$$5b - 6b + 7b - 14b + 9b$$

Proceso:

Se recomienda asociar las cantidades positivas y luego las negativas

$$5b + 7b + 9b - 6b - 14b = 21b - 20b = 1b = b$$

Ejemplo 2: reduce los términos semejantes de:

$$-5m + 8m - 3m + 7m - 12m =$$

Proceso:

Se recomienda asociar las cantidades positivas y luego las negativas

$$-5m + 8m - 3m + 7m - 12m = 8m + 7m - 5m - 3m - 12m = 15m - 20m = -5m$$

Ejemplo 3: reduce los términos semejantes de: $-6x^2 + 8x - 5 + 2x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 4x - 9$

Proceso:

Asociar términos semejantes $2x^3 - 5x^3 - 6x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 5 - 9 =$

Realizar las operaciones agrupadas: $-3x^3 - 10x^2 + 12x - 14$, estos términos no son semejantes por lo que no pueden reducirse.

Ejemplo 4: Reduce términos y simplifica:

$$\frac{3}{4}h-\frac{5}{7}y-\frac{2}{3}h+\frac{3}{2}y+\frac{5}{6}h-\frac{3}{14}y-\frac{5}{12}h+4y=$$

$\frac{3}{4}h+\frac{5}{6}h-\frac{2}{3}h-\frac{5}{12}h=\frac{9h+10h-8h-5h}{12}=\frac{19h-13h}{12}=\frac{6h}{12}=\frac{h}{2}$

$\frac{3}{2}y+4y-\frac{5}{7}y-\frac{3}{14}y=\frac{21y+56y-10y-3y}{14}=\frac{77y-13y}{14}=\frac{63}{14}y=\frac{9}{2}y$

Resultado: $\frac{h}{2}+\frac{9}{2}y$

Dados los siguientes ejercicios efectúa la suma algebraica siguiendo los pasos recomendados.

$6a^3-5a^3+8a^3-3a^3+12a^3-4a^3+2a^3=$

$2mn-5mn+8mn-10mn+6mn-3mn+mn=$

$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}x=$

$a^2b^3-3a^2b^3+8a^2b^3-5a^2b^3+4a^2b^3=$

$\frac{1}{3}z-\frac{4}{5}z+\frac{2}{15}z-\frac{3}{10}z=$

$mn+m^2-2n^3-5m^2+8mn-6n^3+3mn-6m^2+4n^3$

$2xy-5x^2y-6xy^2+4x^2y-5xy-3xy^2+8xy-3x^2y+12xy^2=$

$\frac{3}{4}ab-\frac{5}{3}mn+\frac{2}{3}ab+\frac{4}{6}mn-\frac{5}{6}ab-\frac{4}{12}mn+\frac{3}{2}ab-\frac{5}{2}mn=$

$\frac{2}{3}x^a-\frac{5}{3}x^a+\frac{4}{3}x^a-\frac{1}{3}x^a=$

Actividades de Desarrollo

Con ejemplos específicos mostraremos la aplicación de las reglas para desarrollar óptimamente la secuencia de una suma y/o resta algebraica.

Ejemplo 1: Sumar $3x + 2 \quad y \quad 4x - 6.$

Indicar la suma: $(3x + 2) + (4x - 6)$

Eliminar signos de agrupación: $3x + 2 + 4x - 6$

Agrupar términos semejantes: $3x + 4x + 2 - 6$

Simplificar : $7x - 4$

Ejemplo 2: Sumar: $4x^3 + 6x^2 - 8x + 5 \quad y \quad x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

Indicar la suma: $(4x^3 + 6x^2 - 8x + 5) + (x^3 - 4x^2 - 9x + 9)$

Eliminar signos de agrupación: $4x^3 + 6x^2 - 8x + 5 + x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

Agrupar términos semejantes: $4x^3 + x^3 + 6x^2 - 4x^2 - 8x - 9x + 5 + 9$

Reducir : $5x^3 + 2x^2 - 17x + 14$

Ejemplo 3: Restar : $3xy + 2x^2y - 4x + 5 \quad de \quad 5x^2y + 8x - xy - 2$

Indicar la resta: $(5x^2y + 8x - xy - 2) - (3xy + 2x^2y - 4x + 5)$

Eliminar signos de agrupación: $5x^2y + 8x - xy - 2 - 3xy - 2x^2y + 4x - 5$ (nota el cambio de signo).

Agrupar términos semejantes: $5x^2y - 2x^2y - 3xy - xy + 8x + 4x - 2 - 5$

Reducir: $3x^2y - 4xy + 12x - 7$

Actividad

Dados los siguientes ejercicios efectúa la suma algebraica siguiendo los pasos recomendados.

1. $(6a^3 - 5a^2 + 8a \quad - 3) + (a^3 - 12a^2 - 4a + 2) =$
2. $(2\text{mn} - 5\text{m}n^2 + 8m^2\text{n}) - (10\text{mn} + 6m^2\text{n} - 3\text{m}n^2 + \text{mn}) =$
3. $(\frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{5}\text{x} + \frac{2}{5}) + (\text{x} - \frac{2}{5}x^2 + \frac{7}{5}) =$
4. $(\text{mn} + \text{m}^2 - 2\text{n}^3) - (5\text{m}^2 + 8\text{mn} - 6\text{n}^3) + (3\text{mn} - 6\text{m}^2 + 4\text{n}^3)$
5. $(2\text{xy} - 5\text{x}^2\text{y} - 6\text{xy}^2 + 4\text{x}^2\text{y}) - (5\text{xy} - 3\text{xy}^2 + 8\text{xy} - 3\text{x}^2\text{y} + 12\text{xy}^2) =$
6. $\left(\frac{3}{4}\text{ab} - \frac{5}{3}\text{mn} + \frac{2}{3}\text{ab} + \frac{4}{6}m^2\text{n}\right) + (-\frac{5}{6}\text{ab} - \frac{4}{12}\text{mn} + \frac{3}{2}\text{ab} + \frac{5}{2}m^2\text{n})$
7. $\left(\frac{2}{3}\text{x}^\text{a} - \frac{5}{3}\text{x}^{\text{a}+1}\right) + \left(\frac{4}{3}\text{x}^\text{a} - \frac{1}{3}\text{x}^{\text{a}+1}\right)$

Actividades de Cierre

Para ejercitar y dominar la suma y resta de expresiones algebraicas que involucren la eliminación de símbolos de agrupación para finalmente realizar la reducción de términos semejantes mediante la suma y / o resta.

ELIMINACIÓN DE SÍMBOLOS DE AGRUPACIÓN

Para eliminar los símbolos de agrupación se sigue el criterio:

Cuando está antecedido de un signo positivo: los signos dentro de él no cambian.

Cuando está antecedido de un signo negativo: cambian todos los signos que están dentro del símbolo.

+ (no cambian los signos); - (cambian los signos)

<u>Ejemplo:</u> elimina los símbolos de agrupación y reduce los términos semejantes.

$$+(4x-3y+5z)-(-2x-3y+6z)+(3x+5y-8z)=$$

Eliminando paréntesis queda: $4x-3y+5z+2x+3y-6z+3x+5y-8z=$ agrupando los términos semejantes:

$4x+2x+3x=9x$; $-3y+3y+5y=5y$; $5z-6z-8z=-9z$

Resultado: $9x+5y-9z$

Cuando existen más de un símbolo de agrupación se elimina primero los interiores y después los exteriores.

Elimina los símbolos de agrupación de los siguientes ejercicios:

- $3a-[2b-4a-(5a-6b)+7b+(8a-5b)-2a]=$

se recomienda eliminar primeramente los paréntesis circulares:

$3a-[2b-4a-5a+6b+7b+8a-5b-2a]=$

ahora eliminamos los corchetes

$3a-2b+4a+5a-6b-7b-8a+5b+2a=$

agrupando términos semejantes;

$3a+4a+5a+2a-8a+5b-2b-6b-7b=14a-8a+5b-15b=6a-10b$

- $5\left(4x^2-6x+3\right)+2\left(-3x^2+8x+4\right)-3\left(4x^2+7x-9\right)=$

Resolvemos siguiente los pasos anteriores:

$0x^2-30x+15-6x^2+16x+8-12x^2-21x+27=$

$20x^2+6x^2-12x^2+16x-30x-21x+15+8+27=$

$26x^2-12x^2+16x-51x+50=14x^2-35x+50$

Actividad:

1.-Dadas las siguientes expresiones elimina los símbolos de agrupación y reduce los términos semejantes:

$$-(2a+3b-4)+(a-2b+5)-(4a-7b-6)=$$

$$7m-3n+[4m+(3m-4n)-(5m-2n)+6m]-8m=$$

$$5x-3y-\{4w+5z-[6z+9y-(5t+6w)-(-4x-8w)]+4w-3y\}=$$

$$2(3h-4i+1)-3(-4h+2i-4)+5(3h-6i+3)=$$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

De acuerdo con las finanzas que una madre de familia ha tenido se encuentra el siguiente estado financiero:

Recibe un sueldo de \$2100, \$150 por vales de despensa, \$500 por pago de pensión alimenticia. Y tiene los siguientes gastos: \$1400 despensa para la comida, \$150 servicio de autotransporte de la familia, \$250 pago de servicios públicos, \$350 por gastos diversos. Establece el estado financiero de doña Carmen. ¿Cuánto ahorra por semana si este presupuesto es en promedio igual? ¿Cuánto ahorra al año?

\$2100+\$150+\$500-\$1400-\$150-\$250-\$350= \$2750-\$2150= \$600

Doña Carmen ahorra en promedio \$600 por semana.

El año tiene 52 semanas ella puede ahorrar en un año: (\$600)(52)=\$ 31,200

En una bodega de almacenamiento de azúcar, diariamente hay entrada y salida de costales de azúcar. Al registrar el comportamiento de entrada y salida de costales de dicho producto, el controlador reportó el siguiente comportamiento en el lapso de 4 horas:

Llegaron 20 costales, retiraron 18, llegaron 34, retiraron 23, ingresaron 15, sacaron 28 para repartirlos, llegó una carga con 26, sacaron 25 para repartirlos. Establece el movimiento que hubo durante esas 4 horas que tuvo de registro. Si al final de esas 4 horas llegó un pedido para surtir 18 costales, determina si pudieron satisfacer dicho pedido.

entraron	20	34	15	26
retiraron	18	23	28	25

20+34+15+26 = 95

-18-23-28-25= -94

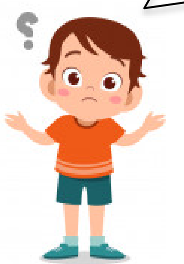
95-94=1costal   al final de ese lapso solo había en existencia un costal

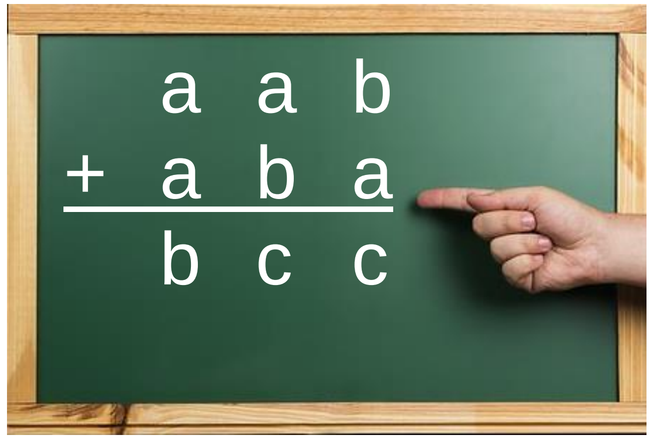
Por lo que no podían surtir el pedido de 18 costales de azúcar, había un déficit(faltante) de 17 costales

3.1.2 Multiplicación

Observa la siguiente imagen:

Si “c” es el número 3. ¿Qué números son “a” y “b”





Introducción

Recuerda que necesitarás:
- Leyes de exponentes
- Leyes de los signos

Podemos multiplicar las diferentes expresiones algebraicas, por ejemplo:

- Monomio por monomio
- Monomio por binomio
- Monomio por polinomio
- Polinomio por polinomio

Y todas las combinaciones y a ti se te ocurran

Recuerda:
Leyes de los exponentes. Si las bases se multiplican los exponentes se suman
Leyes de los signos: (+)(+) = +
(-)(-) = -
(+)(-) = -
(-)(+) = -

Actividades de Apertura

Para ***multiplicar monomios,*** por un lado, multiplicamos sus coeficientes y, por otro, sus partes literales:

Se multiplican las "x" sumando sus exponentes

a)$4x^2 \cdot 3x^4 = (4 \cdot 3) \cdot (x^2 \cdot x^4) = 12x^{2+4} = 12x^6$

Se multiplica el 4 por el 3

Dado que las literales no son semejantes (iguales) las dejamos expresadas ya que representan la multiplicación de estas

b)$4x \cdot -5y = (4 \cdot -5) \cdot (x \cdot y) = -20xy$

Se multiplica el 4 por el -5

Para ***multiplicar un monomio por un polinomio,*** multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio

<u>Ejemplo 1:</u> Multiplicaremos el monomio $3x^2$ por el polinomio $-x^5+4x^3-5x-1$:

a)$3x^2(-x^5 + 4x^3 - 5x - 1) =$

Multiplicamos coeficientes con signos y literales con sus exponentes $= -3x^{2+5} + 12x^{2+3} - 15x^{2+1} - 3x^2$

Resolvemos las operaciones y presentamos resultado $= -3x^7 + 12x^5 - 15x^3 - 3x^2$

<u>Ejemplo 2:</u> Multiplicaremos el monomio 2ab por el polinomio 3a-ab²+4b²c²:

$$\text{b)}2ab(3a-ab^2+4b^2c^2)=$$

Multiplicamos coeficientes con signos y literales con sus exponentes $=6a^{1+1}b-2a^{1+1}b^{1+2}+8a^1b^{1+2}c^2$

Resolvemos las operaciones y presentamos resultado $=6a^2b-2a^2b^3+8ab^3c^2$

Para ***multiplicar dos polinomios,*** multiplicamos cada uno de los términos de uno de los polinomios por el otro, y realiza después la reducción de términos semejantes de los polinomios obtenidos en la multiplicación.

<u>Ejemplo 1</u>*:* Halla el producto de los siguientes polinomios:

$$P(x)=4x^3-5x+1$$

$$Q(x)=2x^2-7$$

Solución:

$$P(x)\cdot Q(x)=(4x^3-5x+1)\cdot(2x^2-7)=$$

$$=4x^3\cdot(2x^2-7)-5x\cdot(2x^2-7)+1\cdot(2x^2-7)=$$

$$=8x^5-28x^3-10x^3+35x+2x^2-7)=$$

$$=8x^5-38x^3+2x^2 35x-7$$

Actividades de Desarrollo

Ejemplo 2: Multiplica (2x -3y +4z^2) por (5x + 2xy + 4xz^2) =

$$(2x - 3y + 4z^2)(5x + 2xy + 4xz^2) =$$

A continuación, realizamos todas las operaciones (utilizamos dos renglones por la extensión):

$(2 \cdot 5 \cdot x \cdot x) + (2 \cdot 2 \cdot x \cdot xy) + (2 \cdot 4 \cdot x \cdot xz^2) + (-3 \cdot 5 \cdot y \cdot x) + (-3 \cdot 2 \cdot y \cdot xy) +$

$(-3 \cdot 4 \cdot y \cdot xz^2) + (4 \cdot 5 \cdot z^2 \cdot x) + (4 \cdot 2 \cdot z^2 \cdot xy) + (4 \cdot 4 \cdot z^2 \cdot xz^2)$

Después resolveremos las operaciones de los paréntesis:

$(10x^2) + (4x^2y) + (8x^2z^2) + (-15yx) + (-6xy^2) + (-12yxz^2) + (20z^2x) + (8z^2xy) +$

$(16xz^4)$

Por último, eliminamos paréntesis:

$10x^2 + 4x^2y + 8x^2z^2 - 15yx - 6xy^2 - 12yxz^2 + 20z^2x + 8z^2xy + 16xz^4$

Actividades de Cierre

Efectúa los siguientes productos. Recuerda que para multiplicar monomios se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las variables que componen la parte literal *("para multiplicar potencias con la misma base se deja como base la misma y se suman los exponentes")*. Cuando una variable no tiene exponente se considera que el exponente es "1".

1.) $(2x^3) \cdot (5x^3) =$

2.) $(12x^3) \cdot (4x) =$

3.) $5 \cdot (2x^2\, y^3 z) =$

4.) $(5x^2y^3z) \cdot (2\, y^2z^2) =$

5.) $(18x^3y^2z^5) \cdot (6x^3yz^2) =$

6.) $(-2x^3) \cdot (-5x) \cdot (-3x^2) =$

Multiplicación de un polinomio por un monomio.

1) $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 3)\,.\,3\,x^2 =$

2) $(6x^4 - 5\,x^2 - 7)\,.\,(-\,4\,x^3) =$

3) $(9x - 13\,x^3 + 12 - 15\,x^2)\,.\,(-\,2x^3) =$

4) $(xy^2 - 4x^2y^3 + 5x^3y + 4x^2)\,.\,(-\,2\,x^3y) =$

Multiplicación de polinomios.

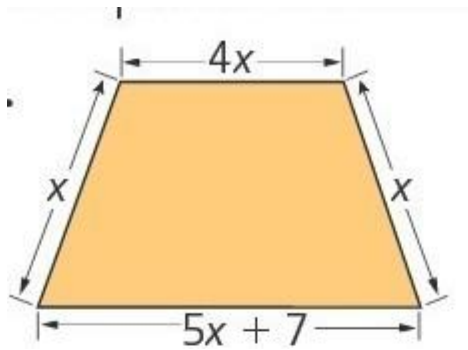
1.) $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

2.) $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

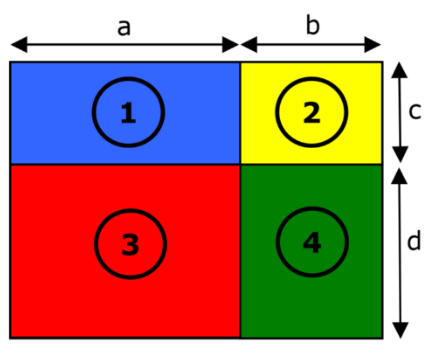
3.) $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) =$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

1) ¿Cuál es el perímetro de esta figura?



2) De la siguiente figura responde:



a) ¿Cuál es el área de la figura compuesta por los rectángulos 1 y 2?

b) ¿Cuál es el área de la figura compuesta por los rectángulos 3 y 4?

c) ¿Cuál es área total?

3.1.3 División algebraica

Actividades de Apertura

Al igual que la multiplicación podemos dividir diferentes expresiones las más utilizadas son:

- Monomio entre monomio
- Binomio entre monomio
- Polinomio entre monomio
- Polinomio entre polinomio

cociente

divisor | dividendo

operaciones

residuo

Y todas las combinaciones y a ti se te ocurran

Recuerda que necesitarás:
- Leyes de exponentes
- Leyes de los signos

Nota:

Leyes de los exponentes para la división. Si las bases literales son iguale y se dividen los exponentes se restan

Leyes de los signos:

(+)/(+)= +
(-)/(-)= -
(+)/(-)= -
(-)/(+)= -

Actividades de Desarrollo

De dos monomios*:* se dividen los coeficientes y se aplica la ley de los signos (si la división no es exacta, se puede dejar indicada); posteriormente, si los coeficientes literales son iguales, se restan sus exponentes, si las variables literales son diferentes, entonces se queda indicada la división.

Ejemplos:

1) $\frac{4a^6b^4}{-2a^2b} = \left(\frac{4}{-2}\right)\left(\frac{a^6}{a^2}\right)\left(\frac{b^4}{b}\right) = \left(\frac{4}{-2}\right)a^{6-2}b^{4-1} = -2a^4b^3$

2) $\frac{2x^4}{4x^3} = \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{x^4}{x^3}\right) = \frac{1}{2}x^{4-3} = \frac{1}{2}x$

3) $\frac{7m^2n^3}{-3mn} = \frac{-7}{3}mn^2$

4) $\frac{10a^5b^6}{-5ax^4} = \frac{-2a^4b^6}{x^4}$

NOTA: recuerda que cuando una variable literal tiene como exponente cero equivale a la unidad y, por lo tanto, será como multiplicar por uno al término.

Ejemplo:

1) $\frac{-9x^2y^3}{-3x^2y} = 3x^0y^2 = 3y^2$

De un polinomio entre un monomio: se procede de igual forma que en el caso anterior dividiendo cada término del polinomio por el monomio dado.

Ejemplos:

1) $\frac{6-12a}{6} = \frac{6}{6} - \frac{12a}{6} = 1-2a$

2) $\frac{x^3y^2}{xy} = x^2y$

3) $\frac{4x^3y^4+2x^3y^2-4x^2y^2+6x^2y^3}{-2xy^2} = \frac{4x^3y^4}{-2xy^2} + \frac{2x^3y^2}{-2xy^2} - \frac{4x^2y^2}{-2xy^2} + \frac{6x^2y^3}{-2xy^2} = -2x^2y^2 - x^2 + 2x - 3xy$

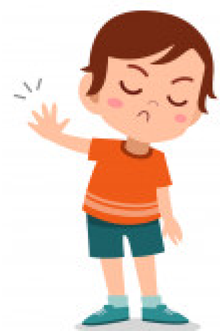
Si **tanto el dividendo como el divisor son polinomios**, conviene seguir el siguiente procedimiento:

(1) Se ordenan los dos polinomios en forma decreciente según las potencias de x, teniendo cuidado de dejar los huecos correspondientes a los términos que falten en el dividendo.

(2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

(3) El término hallado del cociente se multiplica por el divisor y el producto **se resta** del dividendo, obteniendo un resto parcial.

(4) Si el resto parcial es cero, o su grado es menor que el grado del divisor, hemos concluido la división. En caso contrario, se repite el proceso hasta llegar a un resto cuyo grado sea menor que el divisor.



$$
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2b - 5ab + 2 + \frac{5}{2}b \\
\hline
2ab + b & 8a^3b^2 - 6a^2b^2 + 4ab \\
 & -8a^3b^2 - 4a^2b^2 \\
\hline
 & -10a^2b^2 + 4ab \\
 & +10a^2b^2 \qquad + 5ab^2 \\
\hline
 & 4ab + 5ab^2 \\
 & -4ab \qquad -2b \\
\hline
 & 5ab^2 - 2b \\
 & -5ab^2 \qquad -\frac{5}{2}b^2 \\
\hline
 & -2b - \frac{5}{2}b^2
\end{array}
$$

Dividir polinomios es tan sencillo, como dividir cantidades enteras, sólo que un polinomio es como un grupo de números enteros descompuestos en una adición de muchos sumandos. Vamos a explicarlo por medio de un ejemplo:

Sabemos que el proceso de dividir consiste en: dadas dos cantidades "dividendo" y "divisor", se debe buscar otra cantidad llamada "cociente" que multiplicada por el "divisor" nos resulte el "dividendo".

Resolveremos la siguiente división de polinomios paso a paso:

$$\left(3x^2-10x^3+4x^5-x+6\right)\div\left(x^2+1-2x\right)$$

Se ordenan los dos polinomios tomando en cuenta los exponentes de la variable (x) en orden decreciente y completando con coeficiente cero (0) la potencia faltante.	$4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 \;\lfloor\; x^2-2x+1$
Se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del divisor	$4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 \;\lfloor\; x^2-2x+1$
Para efectuar esto se divide el coeficiente del dividendo entre el del divisor y con la variable se aplica la regla de potencia de un cociente de igual base. $\frac{4x^5}{x^2}=\frac{4}{1}\frac{x^5}{x^2}=4x^{(5-2)}=4x^3$	$4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 \;\lfloor\; x^2-2x+1$ $4x^3$ Este es el primer término del cociente
Se multiplica el primer término del cociente por todos los términos del divisor, a estos productos se les cambia el signo y se ordenan debajo del	$4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 \;\lfloor\; x^2-2x+1$ $-4x^5+8x^4-4x^3$ $\qquad 4x^3$

<table>
<tr><td>dividendo según el exponente de la variable.</td><td></td></tr>
<tr><td>Estos productos se resta del dividendo</td><td>

$$\begin{array}{l|l} 4\cancel{x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & x^2-2x+1 \\ \hline -\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3 & 4x^3 \\ \hline \quad 8x^4-14x^3+3x^2-x+6 & \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td>Se repite todo el procedimiento considerando que ahora el primer término del nuevo dividendo es $8x^4$

$$\frac{8x^4}{x^2}=\frac{8}{1}\frac{x^4}{x^2}=8x^{(4-2)}=8x^2$$

</td><td>

$$\begin{array}{l|l} 4\cancel{x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & x^2-2x+1 \\ \hline -\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3 & 4x^3+8x^2 \\ \hline \quad \cancel{8x^4}-14x^3+3x^2-x+6 & \\ \quad -\cancel{8x^4}+16x^3-8x^2 & \\ \hline \qquad 2x^3-5x^2-x+6 & \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuamos ahora dividiendo los demás términos</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\begin{array}{l|l} 4x^5\cancel{+0x^4}-10x^3+3x^2-x+6 & x^2-2x+1 \\ \hline -4x^5\cancel{+8x^4}-4x^3 & 4x^3+8x^2+2x-1 \\ \hline \quad 8x^4\cancel{-14x^3}+3x^2-x+6 & \\ \quad -8x^4\cancel{+16x^3}-8x^2 & \\ \hline \qquad \cancel{2x^3}-5x^2-x+6 & \\ \qquad -\cancel{2x^3}+\cancel{4x^2}-2x & \\ \hline \qquad\quad -x^2-3x+6 & \\ \qquad\quad x^2-2x+1 & \\ \hline \qquad\qquad -5x+7 & \end{array}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">El cociente de la división es : $4x^3+8x^2+2x-1$

Y el residuo: $-5x+7$ (como el grado de este residuo es inferior al del divisor, no se puede continuar dividiendo por lo que la división es inexacta)</td></tr>
</table>

Actividades de Cierre

Realiza las siguientes divisiones algebraicas apoyándote en los temas revisados. Hay espacio suficiente para que realices todas las operaciones.

1.) $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20)$ entre $(x^2 + 3x - 2)$

2.) $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x)$ entre $(x^2 - x + 3)$

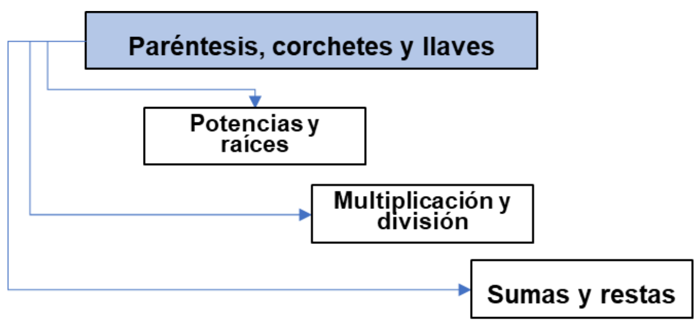
3.) Siendo $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\quad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

calcular P(x) entre Q(x) =

3.2 Jerarquía de operaciones

Introducción

En temas anteriores se revisó el tema de jerarquía de operaciones. Te recordamos que la palabra “jerarquía” nos sirve para indicar el orden de algo en un conjunto de elementos. Así como la jerarquía en una empresa nos indica el orden del dueño, después los gerentes, después supervisores y después el resto del personal, así ocurre con las operaciones. En el siguiente diagrama se explica el orden que se sigue dependiendo cómo aparezcan en distintas situaciones:



En este diagrama se indica que en las operaciones las deberemos efectuar empezando con la resolución dentro de los paréntesis, corchetes y llaves, posteriormente revisaremos cuales operaciones tienen potencias y raíces, después multiplicaciones y divisiones y por último las sumas y restas.

Actividades de Apertura

Resolveremos un ejercicio donde se ejemplifica la jerarquía de operaciones.

Comenzaremos con operaciones únicamente numéricas y después veremos operaciones algebraicas.

Ejemplo 1:

$-9+3(-10+21)-32=$

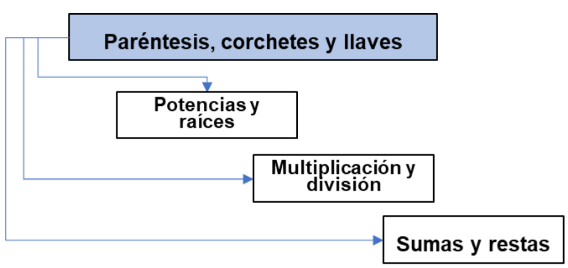
Solución: $-9+3(-10+21)-32=$

Comenzamos con las operaciones dentro de los paréntesis $-9+3(\quad +11 \quad)-32=$

Para quitar los paréntesis se multiplica por el elemento de afuera $-9+33 \quad -32=$

Realizamos las operaciones resultantes $=-8$

Para este ejemplo 1 analiza cómo comenzamos la resolución y compara con el diagrama de la jerarquía de operaciones:



1) Comenzamos revisando si hay paréntesis y se resolvieron las operaciones que estaban dentro de ellos.

2) Después revisamos si había potencias y raíces. En este ejemplo no hay.

3) Después se realizaron las multiplicaciones. No había divisiones.

4) Por último se sumo y resto dependiendo de sus signos. Puedes revisar el tema de “ley de signos” en las primeras páginas de este libro.

Ejemplo 2:

b) $2+[-2-3(2-7)-4]+12=$

Solución: $2+[-2-3(2-7)-4]+12=$

Comenzamos con las operaciones dentro de los paréntesis $2+[-2-3(\quad -5\quad)-4]+12=$

Para quitar los paréntesis se multiplica por el elemento de afuera $2+[-2+15-4]+12=$

Realizamos las operaciones dentro de los corchetes $2+[\quad +9\quad]+12=$

Para quitar los corchetes multiplicamos por el elemento de afuera $2+\quad 9\quad +12=$

Realizamos las operaciones resultantes $=23$

En los dos ejemplos anteriores resolvimos operaciones aritméticas, es decir, con solamente números. Ahora revisaremos que la jerarquía de operaciones también puede ser empleada con términos algebraicos.

Actividades de Desarrollo

En esta sección revisaremos que la jerarquía de operaciones se utiliza igual para términos aritméticos que para los algebraicos. Analiza los siguientes ejemplos con detenimiento, después te tocará practicar lo aprendido.

Ejemplo 1: $5-3(2+8x)=$

Solución: $5-3(2+8x)=$

Dentro de los paréntesis no hay términos semejantes, no le hacemos nada

$5-3(2+8x)=$

Para quitar los paréntesis se multiplica por el elemento de afuera $5-6-24x=$

Realizamos las operaciones resultantes $=-1-24x$

Ejemplo 2: $2^3 - 7[-2 + 8(x - 2)] + 5(x - 3)=$

Solución: $2^3 - 7[-2 + 8(x - 2)] + 5(x - 3)=$

Retiramos paréntesis multiplicando por el elemento de afuera

$2^3 - 7[-2 + 8x - 16\ ] + 5x\ - 15 =$

Realizamos las operaciones dentro de corchetes $2^3 - 7[-18 + 8x \quad] + 5x - 15 =$

Retiramos corchetes multiplicando por el elemento de afuera

$2^3 + 126 - 56x \quad + 5x - 15 =$

Ya que no hay paréntesis ni corchetes, realizamos potencias

$8 + 126 - 56x \quad + 5x - 15 =$

Realizamos las operaciones resultantes $= 119 - 51x$

Ejemplo 3: $7^2 - 7 - [-9x + 2(3x - 2)] + 5(5 - 3)=$

Solución: $7^2 - 7 - [-9x + 2(3x - 2)] + 5(5 - 3)=$

Se resuelven operaciones dentro de paréntesis

$7^2 - 7 - [-9x + 2(3x - 2)] + 5(\ \ 2\ \ )=$

Quitamos paréntesis multiplicando por el elemento externo

$7^2 - 7 - [-9x\ + 6x \quad - 4] + \ 10\ =$

Realizamos las operaciones dentro de corchetes

$7^2 - 7 - [\quad -3x - 4 \quad] + 10\ =$

Retiramos corchetes multiplicando por el signo de afuera

$7^2 - 7 \quad + 3x \quad + 4 \quad + 10\ =$

Resolvemos la potencia

$49 - 7 \quad + 3x \quad + 4 \quad + 10 =$

Realizamos las operaciones resultantes $= 56 + 3x$

Actividades de Cierre

Para los siguientes ejercicios deberás resolver las operaciones guiándote con la jerarquía que acabamos de practicar en los ejemplos previos. Te recomendamos resolver por renglones, así como nosotros resolvimos antes. Esto te traerá más orden mientras dominas el proceso.

1. Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $-5-10(2+4x)$=

2) $9^2+3(7x-20)=$

3) $2^3-9[6-3x+2(x-2)]=$

4) $7^2-2[9x-5(10-8x)]$=

5) $9b-6+6[5b-11(2-3b)]+5^2=$

6) $10^3-6+2[9x-10-(3-x)]-9^2=$

7) $8^3-11+5[7x+2-2(7+3x)]+7^2=$

8) $7x+4^2-[10^2+5(2x-3)+7(2x-1)]=$

Bloque 4 | Productos Notables

Al multiplicar algunos tipos de expresiones algebraicas se obtienen productos en que se distinguen algunos rasgos notables, los cuales nos permiten efectuar esta operación (la multiplicación) en forma rápida al aplicar la regla correspondiente. Tales productos reciben el nombre de ***Productos Notables.***

4.1 Binomio al Cuadrado

Introducción

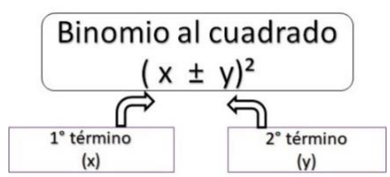
Obtengamos el producto de (x+y) (x+y) utilizando lo explicado en la multiplicación de Binomios que es igual a = $\underline{x^2 - 2xy + y^2}$ y al analizarlo establecemos que los binomios son idénticos, por lo tanto, pueden representarse como un binomio elevado al cuadrado.

Consideremos que se trata de la suma de dos términos ambos positivos, por ejemplo: $(x+y)^2$

El producto de un Binomio al Cuadrado

El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo

Regla General

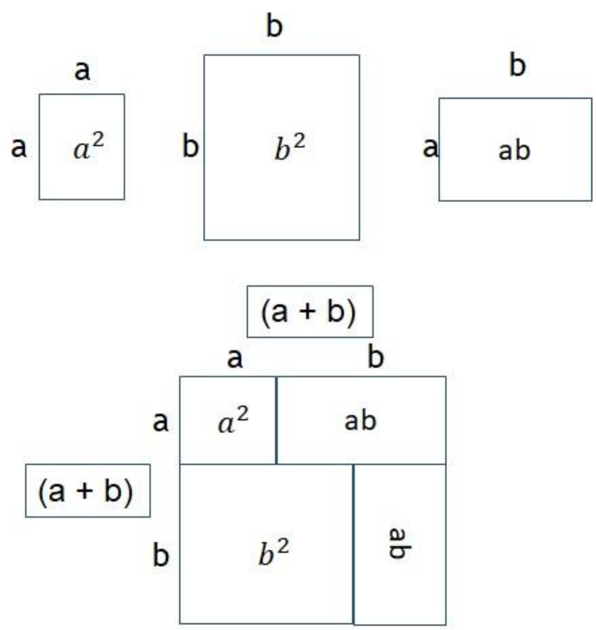


Cuadrado del **primer** termino	$(x)^2 = x^2$
(±) Más o menos el doble producto del **primer** término por el **segundo**	$(2)(x)(y) = \pm 2xy$
Más el **segundo** al cuadrado	$(y)^2 = y^2$
Resultado	$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

Ejemplo:

(x ± 4)²	
Cuadrado del primer termino	$(x)^{2} = x^2$
(±) Más o menos el doble producto del primer término por el segundo,	$(2)(x)(4) = \pm 8x$
Más el segundo al cuadrado	$(4)^2 = 16$
Resultado	$(x \pm 2)^2 = x^2 \pm 8x + 16$

Representación Gráfica



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Caso particular en que el número o literal tenga signo negativo:

$(x - y)^2 = x^2 + 2\,(x)\,(-y) + (-y)^2$ **= $\underline{x^2 - 2xy + y^2}$**

El resultado de elevar un binomio al cuadrado siempre es una expresión compuesta de tres términos, al que se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto (T.C.P.).

Actividades de Apertura

A continuación, incluimos más ejemplos para resolver con la regla general que enunciamos previamente. Te invitamos a analizarlos detenidamente:

Ejemplos:

A. $(n + 6)^2 =$ $\quad (n)^2+2(6)(n)+6^2 =$ $\quad \underline{n^2+12n+36}$

B. $(8a-3b)^2 =$ $\quad (8a)^2+2(8a)(-3b)+(-3b)^2 =$ $\quad \underline{64a^2-48ab+9b^2}$

C. $(3y+2x)^2 =$ $\quad (3y)^2+2(3y)(2x)+(2x)^2 =$ $\quad \underline{9y^2+12xy+4x^2}$

Actividad:

Relaciona las dos columnas escribiendo en los paréntesis de la izquierda las letras con el trinomio cuadrado que correspondan en cada renglón:

( ) $(2a+5b)^2$	a) $36a^2-60ab+25b^2$
( ) $(3a+4b)^2$	b) $\frac{25}{36}a^2+\frac{5}{7}ab+\frac{9}{49}b^2$
( ) $(5a-7b)^2$	c) $9a^2+24ab+16b^2$
( ) $(6a-5b)^2$	d) $49+70a+25a^2$
( ) $(-8a+9b)^2$	e) $64a^2-144ab+81b^2$
( ) $(1.2a-4b)^2$	f) $10.24a^2-28.8ab+20.25b^2$
( ) $(7+5a)^2$	g) $4a^2+20ab+25b^2$
( ) $(a-3b)^2$	h) $a^2-6ab+9b^2$
( ) $(3.2a-4.5b)^2$	i) $1.44a^2-9.6ab+16b^2$
( ) $\left(\frac{5}{6}a+\frac{3}{7}b\right)^2$	j) $25a^2-70ab+49b^2$

Actividades de Desarrollo

Encuentra el resultado en la sopa de polinomios, de los siguientes binomios elevados al cuadrado.

$(3x-2y)^2$, $(x + y)^2$, $(3x-2)^2$, $(4x+2y)^2$, $(x-y)^2$, $(2x-y)^2$, $(2x+y)^2$, $(5x^2y-3x^2)^2$, $(4x^4-6y^3)^2$, $(y^2-2x)^2$.

$9x^2$	$-12xy$	$4y^2$	$12xy$	$-4x^2y^2$	$16x^8$	X^2	Y^4	$-y^2$	$2xy$	$4x^4$
$-12x$	$8x^2y^6$	$16x^2y^6$	$-16x^2y^4$	$4x^2y^2$	$-48x^4y^3$	$-y^2$	$-2xy^2$	Y^2	$-2xy$	X^2
4	5	$12x^2y^6$	$4x^4$	$12x^5$	$36y^6$	$-36y^6$	X^2	$6xy^2$	$8xy^3$	$2xy$
$16x^2$	$25x^2$	$-20xy$	$4y^2$	$-12x^5$	$36y^3$	$-9x^6$	$-6xy^2$	$-8xy^3$	$10x^2$	Y^2
X^6y^4	$4x3^Y5$	$2x^2y^2$	$16x^2$	$-16x^2$	$9x^6$	$-18x^6$	$25x^4$	$24xy$	$-4xy$	$24xy$
X^2y^6	$-2x^4y^5$	$-x^2y^6$	$16x$	$16xy$	$8x^2$	$20x^2y$	$25x^2$	$4x^2$	$4x^2$	Y^4
$16x^2$	$-4xy$	X^2y^6	$4x^2$	$-2xy$	$4y^2$	$-4xy$	Y^4	$4xy$	$-2xy$	$-4xy^2$
$9y^2$	$36y^3$	$4x^2$	$-4xy$	$-2xy$	$-36y^6$	$4x^2$	$-36y^6$	Y^2	$36y$	$4X^2$
$-12xy$	$-12xy$	$36y$	$25x^4y^2$	$-30x^4y$	$9x^4$	$36xy$	$36x$	4	$-4x$	X^2
$4x^2$	$-36y^6$	$16x^4$	$-16x^5$	$4x^6$	$4x^2$	Y^4	$2xy^2$	X^2	$25xy$	$25x$

Actividades de Cierre

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado

1. $(x + 4)(x + 4)$	2. $(\frac{3}{4}x + 2)^2$	3. $(p - 5r)(p - 5r)$
4. $(a – 2b)^2$	5. $(5x^2 + 3)^2$	6. $(6a^2 – b)(6a^2 – b$
7. $(x^3 – 3y^a)^2$	8. $(k^2 – \frac{9}{2})^2$	9. $(\frac{5}{3} – m^3)^2$

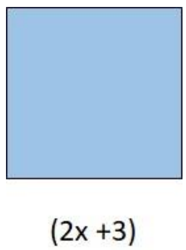
Actividades de Contextualización o Transversalidad

Los productos notables nos sirven para reducir procedimientos y para ahorrarnos algunos pasos a la hora de hacer operaciones. Se utilizan en la ingeniería civil, pues ayuda a medir, calcular y contar las áreas del perímetro, también sirven para calcular la superficie del terreno.

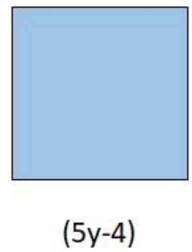
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Determina la expresión polinomial que corresponde al área de las siguientes figuras.

A.



B.



Ejercicios Adicionales

Resuelve los siguientes binomios al cuadrado:

1. $(x + 8)\ (x + 8) =$

2. $(m - 10)^2$

3. $(a - 2)(a - 2)$

4. $(y + \frac{1}{4})^2$

5. $(y + \frac{1}{3})^2$

6. $(p - 6)(- 6 + p)$

7. $(\frac{1}{2} - b)^2$

8. $(-5 + x)^2$

9. $(\frac{4}{3} + n)^2$

10. $(5/4 - s)^2$

4.2 Productos de Binomios Conjugados

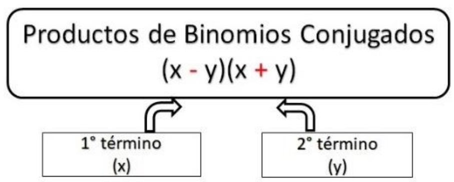
Introducción

Si se tiene el binomio x + y, entonces x - y es su conjugado y viceversa. Para multiplicar dos binomios conjugados se aplica la regla siguiente.

Productos de dos Binomio Conjugados
El producto de un binomio por su conjugado es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$(x+y)(x-y)= x^2-y^2$ ***(Diferencia de Cuadrados)***

Regla General

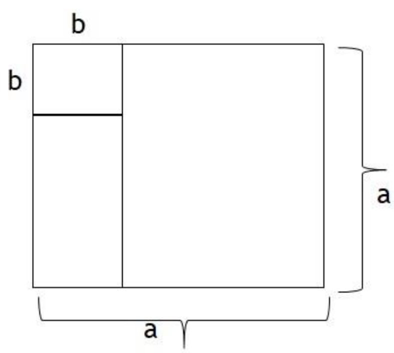


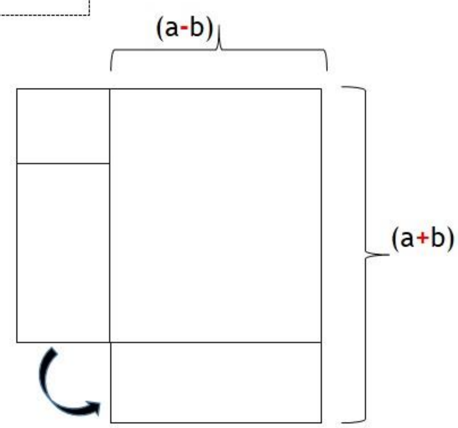
Cuadrado del primer y segundo término.	$x = x^2$ $y = y^2$
Formar un binomio con los cuadrados con signo negativo (Diferencia).	$(x^2 - y^2)$
Resultado	$(x - y)(x + y)=(x^2 - y^2)$

Ejemplo

(x - 6) (x + 6)	
Cuadrado del primer y segundo término.	$x = x^2$ $6 = 6^2 = 36$
Formar un binomio con los cuadrados con signo negativo (Diferencia).	$(x^2 - 36)$
Resultado	$(x - 6)(x + 6) = (x^2 - 36)$

Representación Gráfica





La figura anterior representa entonces $a^2 - b^2$.

Y ahora, simplemente moviendo el rectángulo, tenemos…Un rectángulo cuyo área $(a + b)(a - b)$ es igual al área de la figura anterior, $a^2 - b^2$.

Actividades de Apertura

A continuación, incluimos más ejemplos para resolver con la regla general que enunciamos previamente. Te invitamos a analizarlos detenidamente:

Ejemplos:

A. $(y-1)(y+1)= (y)^2-(1)^2=y^2-1$

B. $(4x+3)(4x-3)=(4x)^2-(3)^2= 16x^2-9$

C. $(2a-5)(2a+5)= (2a)^2-(5)^2 = 4a^2-25$

Relaciona las parejas que son suma por diferencia con su producto.

$3x^2-4$

$9x^2-6y$

$3x^2y^3+5$

$81x^4-36y^2$

$9x^4y^6-25$

$3x^2+4$

$9x^2+6y$

$3x^2y^3-5$

$9x^4-16$

$3x^2y^2+5$

$3x^2y^2-5$

$9x^4y^4-25$

Actividades de Desarrollo

Construye una frase correcta.

La diferencia (a-b), el resultado, cuadrado, del segundo, de, la suma (a+b), del, el cuadrado, al, por, multiplicar, menos, es igual, primero.

Determina los siguientes productos sin efectuar la operación.

a) $(7+m)(m-7)$

b) $(3x+8)(8-3x)$

c) $(5x^4+1)(5x^4-1)$

d) $(x^m y^m+1)(x^m y^m-1)$

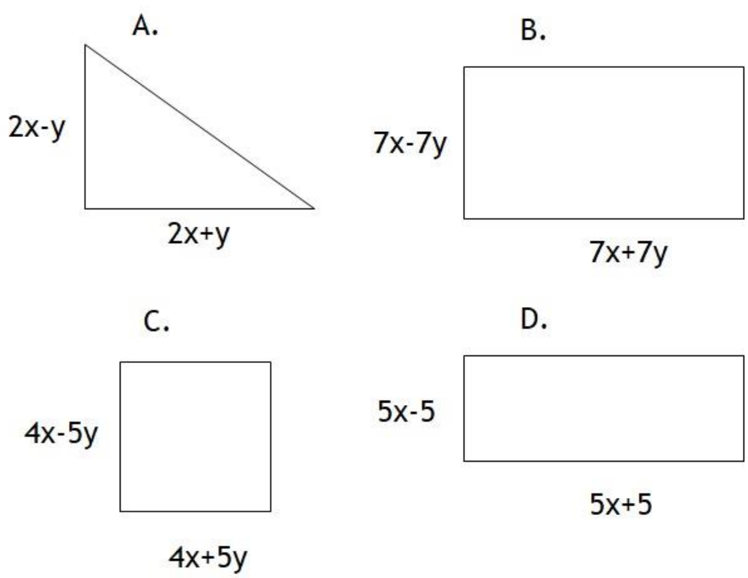
Actividades de Cierre

Desarrolla los siguientes binomios conjugados:

1. $(x – 5)(x + 5)$	2. $(2x + y) (2x – y)$	3. $(5u + 4y)(5u – 4y)$
4. $(7a – 2b)(2b + 7a)$	5. $(-4m + 4n)(4m + 4n)$	6. $(3x – 2)(2 + 3x)$
7. $(q + \sqrt{2})\ (q - \sqrt{2})$	8. $(\frac{7}{3}a - b)(\frac{7}{3}a + b)$	9. $(5x + 10y)(5x -10y)$
10. $(-7a^2 + 2)(7a^2 + 2\ )$		

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Halla el área de las siguientes figuras.



Ejercicios Adicionales

Desarrolla los siguientes productos:

1. $(x - 3)(x + 3)$
2. $(r + 1)(r - 1)$
3. $(a - 2)(a + 2)$
4. $(k + 8)(k - 8)$
5. $(-y + 5)(y + 5)$
6. $(a + 9)(-a + 9)$
7. $(o + p)(o - p)$
8. $(m - n)(m + n)$
9. $(xy - z)(xy + z)$
10. $(9f^3 - 1)(9f^3 + 1)$

4.3 El Producto de Binomios con Término Común

Introducción

Regla General

Productos de Binomios con Término Común

El producto de dos binomios con un término común es un trinomio cuyo primer término es el cuadrado del término común, su segundo término es el producto de la suma de los términos no comunes por el término común y el tercer término es el producto de los términos no comunes.

Productos de Binomios con Termino Común

$(x+a)(x+b)$

Término común (x)

Términos no comunes (a,b)

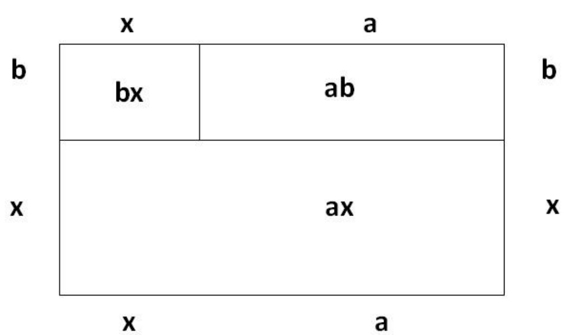
Cuadrado del término común	$(x)^2 = x^2$
Más el producto de la suma de los no comunes por el término común	$(a+b)x = (a+b)x$
Más el producto de los no comunes	$(a)(b) = ab$
Resultado	$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplos

$(x+9)(x+3)$	
Cuadrado del término común	$(x)^2 = x^2$
Más el producto de la suma de los no comunes por el término común	$(9+3)x = (12)x$
Más el producto de los no comunes	$(9)(3) = 27$
Resultado	$(x+9)(x+3) = x^2+12x+27$

$(x - 9)(x + 3)$	
Cuadrado del término común	$(x)^2 = x^2$
Más el producto de la suma de los no comunes por el término común (Aplicar leyes de signos)	$(-9+3)\,x = (-6)\,x$
Más el producto de los no comunes (Aplicar leyes de signos)	$(-9)(3) = -27$
Resultado	$(x-9)(x+3) = x^2 - 6x - 27$

Representación Grafica



$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)+ab$

Los Binomios deben estar ordenados; el primer término de ambos debe ser el término idéntico.

Actividades de Apertura

Ejemplo:

A. $(y+7)(y-3)= (y)^2+ (7-3)y + (7)(-3) = \underline{y^2+4y-21}$

B. $(3x+1)(3x-5)= (3x)^2 +(1-5)3x + (1)(-5) = \underline{9x^2 -12x-5}$

C. $(a+3)(a+8)= (a)^2 + (3+8)\, a + (8)(3)= \underline{a^2+11a+24}$

Resuelve los ejercicios, escribe el valor que representa cada letra y completa la frase oculta.

$(x+1)(x+2) = Ax^2 + Cx + B$

$(x+4)(x+2) = x^2 + Gx + J$

$(x+4)(x+3) = x^2 + Ix + O$

$(x+6)(x+7) = x^2 + Px + 42$

$(x+3)(x+6) = x^2 + Lx + 18$

$(x+1)(x+3) = x^2 + Dx + 3$

$(x+2)(x+3) = x^2 + Ex + 6$

$(x+3)(x+7) = x^2 + Mx + 21$

$(x+1)(x+14) = x^2 + Sx + R$

$(x+5)(x+6) = x^2 + Nx + 30$

$(x+10)(x+6) = x^2 + Tx + 60$

$(x+1)(x+17) = x^2 + Vx + U$

$(x+2)(x+17) = x^2 + Zx + 34$

___ ___ ___ ___ ___   ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___   ___ ___
13 17 5 4 12   1 6 7 9 7 19 1 14   10 7

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___   ___ ___   ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___
16 14 1 2 1 8 12   15 7   1 13 14 5 11 4 12

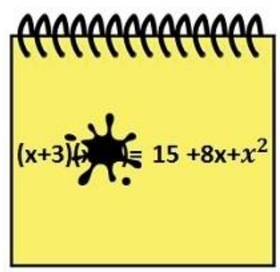
___ ___ ___ ___ ___ ___ ___   ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___
10 5 16 12 4 12 15   1 2 14 5 18 7 1 4 12 15

Actividades de Desarrollo

¿Puedes o no utilizar el producto notable estudiado anteriormente cuando los binomios que se multiplican son: (3x+2a) (3x-5a)? Justifica tu respuesta

Elige la alternativa correcta y subráyala. Tu desarrollo déjalo expresado.

a) Observa la siguiente expresión algebraica escrita en una hoja de papel, calcula el binomio que cubre la mancha:



A. $x+3$ B. $x+5$ C. $x-5$ D. $x-3$

b) Multiplica y simplifica de las siguientes expresiones (x+1)(x-2)- (x+2)(x-3)

A. x^2+6 B. -4 C. x^2-4 D. 4

c) El producto de (x-7)(x-19) es:

A. $x^2-26x+133$ B. $x^2-6x+133$ C. $x^2-26x-70$ D. $x-26x^2+70$

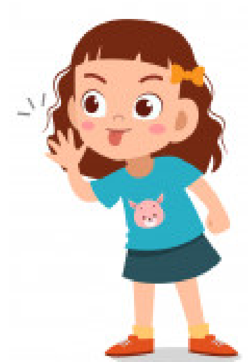
d) Encuentre el producto de 3x(x+2)(x+5)

A. $3x^2+21x^2+1$ B. $x^2+7x+15$ C. $3x^3+21x^2+30x$ D. $3x^3+5x^2+30$

Actividades de Cierre

Desarrolla los siguientes binomios con término común:

1. $(x - 2)(x + 1)$	2. $(m + 3)(m - 2)$	3. $(r + 7)(r - 4)$
4. $(k - 10)(k - 2)$	5. $(b - 6)(b - 5)$	6. $(2a - 6)(2a + 4)$
7. $(z - 3)(z - 4)$	8. $(x + 4)(x + 6)$	9. $(4n - 5)(4n - 2)$
10. $(x^2 - 10)(x^2 + 5)$		



Actividades de Contextualización o Transversalidad

a) Un terreno forma rectangular, mide x + 4 de alto y de base x + 10.indica la expresión algebraica que expresa el área del terreno

b) Hallar el área de una Tablet cuyas dimensiones son (3x + 4) (3x +1)

c) Hallar el Área de una puerta cuyas dimensiones son (6x +10) (6x -2)

Ejercicios Adicionales

Resuelve los productos siguientes apoyándote en lo aprendido arriba:

1. $(a - 8)(a + 5)$
2. $(s + 7)(s - 4)$
3. $(b - 10)(b - 2)$
4. $(x - 6)(x - 5)$
5. $(r + 4)\ (r + 6)$
6. $(n - 3)\ (n + 4)$
7. $(m - 1)(m - 8)$
8. $(b - 9)\ (b + 3)$
9. $(x + 2)(x - 5)$
10. $(p + 8)(p - 3)$

4.4 Binomio al Cubo

Introducción

Regla General

Suma de Binomios elevados al cubo

$(x + y)^3$

1° término (x)

2° término (y)

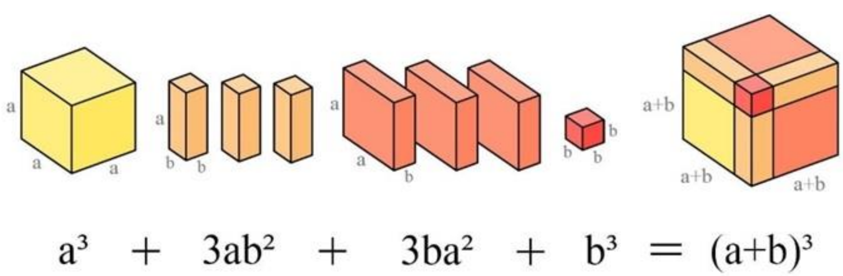
Producto de la suma de un Binomio al Cubo
Es igual al cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

Cubo del primer termino	$(x) = x^3$
(+) Más tres veces el primer término al cuadrado por el segundo	$(3)(x)^2\,(y) = 3x^2y$
(+) Más tres veces el primer término por el segundo al cuadrado.	$(3)(x)(y)^2 = 3xy^2$
(+) Más el segundo término al cubo	$(y)^3 = y^3$
Resultado	$(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Ejemplo

$(x + 2)^3$	
Cubo del primer termino	$(x) = x^3$
(+) Más tres veces el primer término al cuadrado por el segundo	$(3)(x)^2\,(2) = (3)(2)\,(x^2) = 6x^2$
(+) Más tres veces el primer término por el segundo al cuadrado.	$(3)(x)(2)^2 = (3)(x)(4) = 12x$
(+) Más el segundo término al cubo	$(2)^3 = 8$
Resultado	$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Representación Gráfica



Regla General

Resta de Binomios elevados al cubo
$(x - y)^3$

1° término (x)

2° término (y)

Producto de la Resta de un Binomio al Cubo Es igual al cubo del primero, menos el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.

Ejemplo:

$(x - y)^3$	
Cubo del primer termino	$(x) = x^3$
(-) Menos tres veces el primer término al cuadrado por el segundo	$(3)(x)^2 (y) = 3x^2y$
(+) Más tres veces el primer término por el segundo al cuadrado	$(3)(x)(y)^2 = 3xy^2$
(-) Menos el segundo término al cubo	$(y)^3 = y^3$
Resultado	$(x + 2)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Ejemplo:

$(x - 2)^3$	
Cubo del primer termino	$(x) = x^3$
(-) Menos tres veces el primer término al cuadrado por el segundo	$(3)(x)^2 (2) = (3)(2) (x^2) = 6x^2$
(+) Más tres veces el primer término por el segundo al cuadrado	$(3)(x)(2)^2 = (3)(x)(4) = 12x$
(-) Menos el segundo término al cubo	$(2)^3 = 8$
Resultado	$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Actividades de Apertura

Analizaremos dos ejemplos más desarrollados de binomios al cubo. El primer ejemplo es un binomio que se está sumando, el segundo ejemplo se restará. Analiza los pasos que se utilizaron para llegar al resultado y compáralo con lo revisado anteriormente.

Ejemplo:

A. $(x+4)^3 = (x)^3+3(x)^2(4)+3(x)(4)^2+(4)^3$

$= \underline{x^3+12x^2+48x+64}$

B. $(5b-3)^3= (5b)^3-3(5b)^2(3)+3(5b)(3)^2-(3)^3$

$= \underline{125b^3-225b^2+135b-27}$

Actividades de Desarrollo

Encuentre el producto de $(6x-1)^3$

A. $36x^3-9x+18-1$

B.$216x^{3+}108x^2+18x-1$

C. $216x^3-108x^2+18x-1$

D.$36x^3-9x^2+18x-1$

Encuentre el producto de $(x+5)^3$

A. $x^3+15x^2+75x+10$

B.$x^3-15x^2+75x-125$

C.$x^3+15x^2+15x+125$

D. $x^3+15x^2+75x+125$

Completa el desarrollo de la siguiente diferencia de cubos $(3x-2)^3=(3x)^3-(2)^3$

A..$-3(3x)^2(2)+3(3x)(2)^2$

B..$-3(3x)(2)+3(3x)(2)^2$

C..$-3(3x)^2(2)+3(3x)(2)$

D..$3(3x)^2(2)+3(3x)(2)^2$

Actividades de Cierre

Desarrolla los siguientes binomios al cubo:

1. $(x-2)^3$	2. $(m-3)^3$	3. $(r+7)(7+r)(r+7)$
4. $(k-10)^3$	5. $(b-6)^3$	6. $(2a+4)^3$
7. $(z-3)(z-3)(z-3)$	8. $(pq^2+7)^3$	9. $(2n-\frac{1}{2})^3$
10. $(x^2-5)^3$		

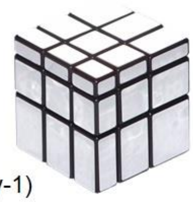
Actividades de Contextualización o Transversalidad

Halla la expresión polinomial que corresponde al volumen del cubo de las figuras:

Volumen: ___________

(2x+3)

Volumen: ___________



(4y-1)

Ejercicios Adicionales

Apoyándote en lo aprendido en esta unidad desarrolla los siguientes binomios al cubo:

1. $(x - 1)^3$
2. $(p + 6)^3$
3. $(m - 2)^3$
4. $(b + 10)^3$
5. $(k - \frac{1}{3})^3$

Bloque 5 | Ecuaciones

En la vida diaria, podemos encontrar situaciones que nos llevan al uso de distintos tipos de ecuaciones lineales, entre ellas tenemos:

- Ecuaciones lineales con una incógnita
- Ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas.

Como la que se tiene en el siguiente enunciado:

En una clase de Inglés de bachillerato, la mitad de los alumnos tiene 16 años, la sexta parte tiene 18 años y la mitad de la diferencia de los alumnos de 16 y 18 años, tiene 17 años, los ocho restantes tienen 19 años. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Para resolver este tipo de planteamientos, revisa con atención los siguientes apartad

5.1 Ecuaciones lineales

Introducción

Una ecuación lineal, es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y que se verifica únicamente para determinados valores de las variables involucradas. En este manual, abordaremos las ecuaciones con una y dos incógnitas.

5.1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita es una igualdad en la que figura una letra con exponente uno y que es cierta para un solo valor de la letra, a este valor se le llama solución de la ecuación.

Actividades de Apertura

Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se obtiene el valor de la incógnita que satisface la igualdad.

Ejemplo.

El valor de "x" que cumple con la ecuación $3x + 2 = 8$ es:

a) -2 b) 1 c) 2 d) -1

Solución:

Se sustituye cada valor de los cuatro incisos propuestos en la igualdad, aquel que cumpla con la igualdad será el valor de x.

Para el inciso a)

Si $x = -2$ se obtiene $3x + 2 = 8$

$3(-2) + 2 = 8$

$-6 + 2 = 8$

$-4 \neq 8$

El -2 no cumple con la igualdad

Para el inciso b)

Si $x = 1$ se obtiene $3x + 2 = 8$

$3(1) + 2 = 8$

$3 + 2 = 8$

$5 \neq 8$

El 1 no cumple con la igualdad

Para el inciso c)

Si $x = 2$ se obtiene $3x + 2 = 8$

$3(2) + 2 = 8$

$6 + 2 = 8$

$8 = 8$

El 2 cumple con la igualdad

Para el inciso d)

Si $x = -1$ se obtiene $3x + 2 = 8$

$3(-1) + 2 = 8$

$-3 + 2 = 8$

$-1 \neq 8$

El -1 no cumple con la igualdad

La respuesta es el inciso "c".

Actividades de Desarrollo

Para la resolución de ecuaciones, se aplican los despejes, los cuales permiten obtener el valor de la incógnita mediante las operaciones inversas.

Operación	Operación inversa
Suma	Resta
Resta	Suma
Multiplicación	División
División	Multiplicación

Ejemplo 1: El valor de x que cumple con $5x + 7 = 12$ es:

b) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Solución: Los elementos que no contengan a la incógnita se pasan al 2° miembro con la operación contraria.

$$5x + 7 = 12$$
$$5x = 12 - 7$$
$$5x = 5$$

Luego, el número que se multiplica con la incógnita pasa con la operación inversa que es la división conservando su signo, entonces:

$$x = \frac{5}{5}$$
$$x = 1$$

La respuesta es el inciso “b”.

Ejemplo 2: El valor de x que satisface la ecuación $7x + 5 = 2x - 15$ es:

a) 4 b) -2 c) 2 d) -4

Solución:

Los elementos que contengan la incógnita se pasan al primer miembro y las contantes al segundo, con las operaciones inversas, entonces:

$$7x + 5 = 2x - 15$$

$$7x - 2x = -15 - 5$$

se simplifican los términos semejantes

$$5x = -20$$

se despeja x

$$x = \frac{-20}{5}$$

$x = -4$ La respuesta es el inciso "d"

Ejemplo 3: El valor de "y" que cumple con la igualdad $-2(5y + 1) = -4(y + 6) - 2$ es:

a) -4 b) 4 c) 3 d) -3

Solución:

Se eliminan los paréntesis en la igualdad multiplicando:

$$-2(5y + 1) = -4(y + 6) - 2$$

$$-10y - 2 = -4y - 24 - 2$$

Se agrupan en el primer miembro los términos con la incógnita y en el segundo los términos independientes.

$$-10y - 2 = -4y - 24 - 2$$

$$-10y + 4y = -24 - 2 + 2$$

$$-6y = -24$$

Se simplifican los términos semejantes:

$$y = \frac{-24}{-6}$$

$y = 4$ La respuesta es el inciso "b".

Ejemplo 4: El valor de x que satisface la igualdad $3\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3} - x = 0$ es:

a) $9\frac{1}{6}$ b) $9\frac{5}{6}$ c) $-9\frac{5}{6}$ d) $-9\frac{1}{6}$

Solución: se despeja la incógnita x:

$$3\frac{1}{2} + 5\frac{2}{3} - x = 0$$

$$-x = -3\frac{1}{2} - 5\frac{2}{3}$$

$$-x = -\frac{7}{2} - \frac{17}{3}$$

$$-x = \frac{-21 - 34}{6} = \frac{-55}{6}$$

$$-x = -9\frac{1}{6}$$

Se multiplican los miembros por (-1) ya que la incógnita es negativa, entonces:

$x = 9\frac{1}{6}$ La respuesta es el inciso "a".

Actividad

Encuentra los valores que se te solicitan en cada ejercicio:

1) El valor de "x" que se cumple con $6x - 10 = 2$ es:

____

2) El valor de "x" que se cumple con $-2 + 3x = 10$ es:

____

3) El valor de "x" que se cumple con $4m + 2 = 20 - 2m$ es:

____

4) El valor de “x” que se cumple con $-3(2y+3) = -10(y+3)$ es:

____

5) El valor de “x” que se cumple con $2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{4} - x = 0$ es:

____

6) El valor de “x” que se cumple con $2(3-5n) = 36$ es:

____

Continuemos ahora viendo algunos ejemplos de resolución de problemas

Ejemplo 5: La suma de 5 números consecutivos es 2165. ¿Cuál es el primer número?

a) 429 b) 430 c) 431 d) 432

Solución:

Elementos del problema:
Un numero consecutivo se obtiene sumando uno al número que lo antecede, entonces:

$$1°\ numero: x$$
$$2°\ numero: x+1$$
$$3°\ numero: x+2$$
$$4°\ numero: x+3$$
$$5°\ numero: x+4$$

Planteamiento:
La suma de los 5 números es 2165

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 2165$$

Resolvemos:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 2165$$
$$5x + 10 = 2165$$
$$5x = 2165 - 10$$
$$5x = 2155$$
$$x = \frac{2155}{5} = 431$$

La respuesta es el inciso “c”.

Ejemplo 6: La suma de 8 números enteros pares consecutivos es 520, ¿Cuál es el tercer número?

a) 56 b) 58 c) 60 d) 62

Solución:

Elementos del problema: un numero par consecutivo se obtiene sumando 2 al número que lo antecede, entonces:

1° numero: x 3° numero: x + 4 5° numero: x + 8 7° numero: x + 12

2° numero: x + 2 4° numero: x + 6 6° numero: x + 10 8° numero: x + 14

Planteamiento: La suma de los 8 números es igual a 520.

$$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)+(x+10)+(x+12)+(x+14)=520$$

Se eliminan los paréntesis:

$$x+x+2+x+4+x+6+x+8+x+10+x+12+x+14=520$$

$$8x+56=520$$

$$8x=520-56$$

$$8x=464$$

$$x=\frac{464}{8}$$

$$x=58$$

Luego, el tercer número es x + 4 = 58 + 4 = 62. La respuesta es el inciso "d".

Ejemplo 7: Al sumar la edad de Fabián con la edad de Belem, se obtiene 51. Si Fabián es 3 años más grande que Belem, ¿Cuál es la edad de Belem?

a) 21 años b) 24 años c) 27 años d) 30 años

Solución:

Elementos del problema: Fabián excede 3 años a Belem, entonces:

Edad de Fabián es: x + 3

Edad de Belem es: x

Planteamiento:

Edad de Fabián + Edad de Belem: 51

Resolución:

$$(x+3)+x=51$$
$$x+3+x=51$$
$$2x+3=51$$
$$2x=51-3$$
$$2x=48$$
$$x=\frac{48}{2}$$
$$x=24$$

La respuesta es el inciso “b”.

Actividades de Cierre

Ejemplo: Miguel y Ricardo compraron calculadoras de \$120.00 y \$90.00 respectivamente. Si Miguel compro 4 calculadoras más que Ricardo y en total se gastaron \$1320.00, ¿Cuántas calculadoras compro Ricardo? _________

Un planteamiento que permite resolver el problema anterior es:

a) $120(x+4)+90x=1320$ c) $120(x-4)+90x=1320$

b) $120x+90(x+4)=1320$ d) $120(4x)+90x=1320$

Solución: *Elementos del problema*: Se establece la siguiente tabla:

	Número de calculadoras	Precio por calculadora	Gasto por persona
Miguel	$x+4$	\$120	$120(x+4)$
Ricardo	x	\$90	$90x$

Planteamiento: Gasto de Miguel $+$ Gasto de Ricardo $=1320$

$120(x+4)$ $+$ $90x$ $=1320$

La respuesta es el inciso “a”

Ejercicios Adicionales

Encuentra los valores que se te solicitan en cada ejercicio:

1) El valor de “x” que se cumple con $x - 18 = 2$ es:

____

2) El valor de “x” que se cumple con $-7 + 6x = 23$ es:

____

3) El valor de “x” que se cumple con $4m + 4 = -20 + 7m$ es:

____

4) El valor de “x” que se cumple con $-7(y - 4) = -2(9 + y)$ es:

____

5) La suma de 4 números enteros pares consecutivos es 130, ¿Cuál es el tercer número?

____

6) Si sumamos las edades de un papá y su hijo obtenemos 60. Si el hijo es 15 años menor que el padre, ¿Cuál es la edad del papá?

____

5.1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

La importancia y necesidad de aprender Álgebra radica en que proporciona las herramientas para resolver una diversidad de problemas que la Aritmética está limitada para resolverlos. El Álgebra permite tratar con cantidades que a pesar de ser desconocidas se puede llegar a conocer, con un poco o mucho de análisis y razonamiento, cual es la dependencia entre ellas, es decir, las operaciones que se deben realizar para lograr una determinada equivalencia.

Cuando nos enfrentamos a un problema, la primera necesidad es transformarlo a uno o más enunciados en lenguaje algebraico. Para ello debemos analizar la situación planteada para generar las expresiones algebraicas pertinentes y después buscar las igualdades que se pueden establecer para dar origen a las ecuaciones que deben resolverse para a su vez, dar solución al problema.

Una regla general para la solución de problemas algebraicos es que siempre se requerirán el mismo número de ecuaciones independientes que de incógnitas o cantidades desconocidas; así, si un problema tiene 2 cantidades desconocidas y solo se puede formular una ecuación, será imposible hallar un valor numérico específico para cualquiera de las incógnitas. Si se tiene un sistema de ecuaciones en el cual se puede llegar, a partir de una de las ecuaciones, a obtener las otras multiplicando por un factor, entonces las ecuaciones no son independientes. Si la diferencia entre dos ecuaciones es solo un término constante, el sistema puede ser inconsistente debido a que no será posible llegar a una solución.

Las siguientes ecuaciones $x + 2y - 3 = 0$ y $3x + 6y - 9 = 0$ no son independientes porque la segunda se obtiene de la primera multiplicando por tres. Eso significa que en realidad se trata de la misma ecuación. Si las graficamos, representarían la misma recta.

Las ecuaciones $x + 2y = 3$ y $x + 2y = 10$ son inconsistentes porque no sería posible que un número cualquiera sumado con el doble de otro número den dos resultados distintos. Si graficáramos ambas rectas obtendríamos dos rectas paralelas, es decir, que no se cruzan. Dado que la solución de un sistema de ecuaciones por el método gráfico se obtiene localizando el punto de cruce de las rectas, los sistemas inconsistentes no tienen solución.

Consideremos una situación de aplicación para ejemplificar la solución de problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales:

> *En una tienda departamental se venden laptops y celulares. En el último inventario se tenían en total 45 aparatos ¿Cuántas laptops y cuantos celulares tiene?*

Claramente existen dos incógnitas en esta situación: El número de celulares y el número de laptop. Si asignamos una literal a cada cantidad desconocida.

L = número de computadoras y *C = número de celulares*

Enseguida debemos de formular las ecuaciones que sean posibles para tratar de resolver el problema. En esta situación, una ecuación seria:

$$L + C = 45$$

ecuación 1

Con esta única ecuación no podríamos saber cuántos celulares y cuantas computadoras tiene la tienda. Como hay dos incógnitas y ya no es posible formular otra ecuación, requerimos de información adicional. Para ello se debe hacer investigación adicional o recopilar más información. Supongamos que logramos saber que el costo de una computadora es de 6000 pesos y el de un celular es de 4000 pesos y en los registros de contabilidad se tiene que la tienda pagó 240 000 pesos por ambos productos. Con esta información adicional podemos formular otra ecuación ya que sabemos que:

4000 C= costo de todos los celulares y 6000 L = costo de todas las computadoras o laptop.

Por lo tanto; $6000\,L + 4000\,C = 240\,000$ ecuación 2.

La ecuación 1 y 2 forman un sistema de ecuaciones porque los valores de las incógnitas hacen verdaderas ambas igualdades, es decir, solucionan ambas ecuaciones simultáneamente (al mismo tiempo). Si se hubieran detectado tres incógnitas serían necesarias 3 ecuaciones.

Ya establecidas las ecuaciones, el siguiente paso es resolverlas. Existen varios métodos para hacerlo, aunque aquí trataremos los métodos de Reducción, Sustitución e Igualación. En estos métodos la clave está en eliminar una a una las incógnitas hasta lograr establecer el valor de una de ellas para después encontrar las demás. Resolveremos el sistema de ecuaciones anterior por los tres métodos:

ec. 1→ $L + C = 45$

ec. 2→ $6000L + 4000C = 240\,000$

A) Método de Reducción

En este método se elimina una de las incógnitas sumando algebraicamente ambas ecuaciones después de lograr que los coeficientes, en ambas ecuaciones, de una de las incógnitas sean inversos aditivos, es decir, tengan el mismo valor, pero signo contrario. Para lograr lo anterior basta multiplicar una de las ecuaciones por un número que logre igualar el coeficiente de la literal seleccionada en ambas ecuaciones pero que su signo sea contrario.

Multiplicando la ec. 1 por -6000 $\quad -\cancel{6000L} - 6000C = -270\,000$

Sumándole la ec. 2 $\quad \underline{\cancel{6000L} + 4000C = \;\; 240\,000}$

$-2000C = -30\,000$ ← ec.3

La ecuación 3 resultante ya tiene una sola incógnita, ahora debemos despejar C para saber su valor: $C = -30\,000 / -2000$

$C = 15$ celulares

Sustituyendo este valor en ecuación 1 y despejando L.

$L + C = 45$

$L + 15 = 45$

$L = 45 - 15$

$L = 30$ laptops

B) Método de Sustitución

En este método la eliminación de una incógnita se logra despejándola de una de las ecuaciones y sustituyendo su valor en la otra.

Escribamos nuestro Sistema de ecuaciones: ec.1 $L + C = 45$

ec.2 $6000L + 4000C = 240\ 000$

Despejemos L en la ec. 1 convirtiéndose en ec. 3 ec.3 $L = 45-C$

Sustituyamos el valor de L de la ec. 3 en la ec.2. $6000(45-C) + 4000C = 240\ 000$

Despejamos C de esta ecuación.

$270\ 000 – 6000C + 4000C=240\ 000$

$270\ 000- 2000C=240\ 000$

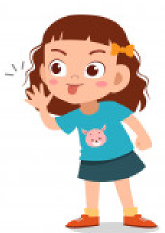
$270\ 000-240\ 000=2000\ C$

$30\ 000=2\ 000C$

Dividamos entre 2000 para obtener C $C=30\ 000/2000$

$C=15$ celulares.

El valor de L se obtiene igual que en el método anterior.



C) Método de igualación.

En este método se despeja la misma literal o incógnita de ambas ecuaciones y se igualan los valores obtenidos, para finalmente despejar la literal que permanece.

De nuevo nuestro sistema de ecuaciones es:

ec. 1 $L + C= 45$

ec. 2 $6000L + 4000C= 240\ 000$

Despejando L en ambas ecuaciones:

De la ec. 1 $L=45-C$

De ec. 2 $L= (240\ 000-4\ 000C) / 6\ 000$

Igualando los valores de L de ec. 1 y ec. 2:

45 – C=(240 000- 4 000C)/6 000

Despejando C:

6 000(45 – C)=240 000 – 4 000C

-270 000-6000C=240 000-4000C

270 000- 240 000=6000C-4000C

30 000 = 2000 C

Dividimos entre 2000 para obtener el valor de C: C=30000/2000

C=15 celulares. Y ya saben cómo obtener L.

Actividad

I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{Bmatrix} 3a - 2b = 4 \\ a + b = -1 \end{Bmatrix}$ 2. $\begin{Bmatrix} 5x + 2y = 8 \\ 2x - 4y = -8 \end{Bmatrix}$ 3. $\begin{Bmatrix} 95x + 20y = 800 \\ 20x - 4y = -100 \end{Bmatrix}$

II. Resuelve los problemas siguientes:

1. Se tiene 3 lbs de Té y 8 lbs de café que cuestan en conjunto 39.70 dólares. Por otra parte, 5 lbs de té y 6 lbs de café cuestan 47.10 dolares.¿cuál es el costo por cada libra de té y de café?

2. Un químico cuenta con dos soluciones de ácido. Una contiene 15% de ácido puro y la otra 6 %. ¿Cuántos cm^3 de cada solución debe usar para obtener 400 cm^3 de una solución con 9 % de ácido?

Actividades de Desarrollo

Consideremos ahora una situación que da lugar a tres ecuaciones y obviamente tres incógnitas.

Martin trabaja repartiendo comida en Uber Eats. Ayer llevó tres pedidos a diferentes clientes. El primero pidió tres tacos, dos quesadillas y dos aguas frescas; el segundo, cuatro tacos, una quesadilla y un agua y el tercero, dos tacos, dos quesadillas y un agua.
El importe de cada uno de los pedidos fue de 105, 90 y 80 pesos respectivamente. ¿Cuánto cuestan cada taco, quesadilla y agua?

Nuestras incógnitas son el costo de cada taco, quesadilla y agua. Asignando una literal que represente estas incógnitas:

t=costo de un taco q= costo de una quesadilla w= costo de un agua.

Enseguida establecemos las ecuaciones correspondientes:

ec.1 $3t + 2q + 2w = 105$

ec. 2 $4t + q + w = 90$

ec. 3 $2t + 2q + w = 80$

Para resolver este sistema de ecuaciones utilizaremos los métodos de reducción e igualación.

A) Método de reducción.

Primero debemos eliminar una de las literales de manera que al final obtengamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para ello formaremos parejas con las ecuaciones originales y eliminaremos una de las literales. Pare este caso, seleccionaremos w.

Primera pareja: ec. 1 $3t + 2q + 2w = 105$

ec. 2 $4t + q + w = 90$

Multiplicando la ec. 2 por -2 y sumándola a la ec. 1.

$$\begin{array}{rcl} -8t - 2q - 2w & = & -180 \\ \underline{3t + 2q + 2w} & \underline{=} & \underline{105} \end{array}$$

Resulta la nueva ec. 4: $-5t = -75$

Segunda pareja:

ec. 2 $4t + q + w = 90$

ec. 3 $2t + 2q + w = 80$

Para eliminar w, multiplicamos por -1 la ec. 3 y la sumamos con la ec. 2.

$$\begin{array}{rcl} -2t - 2q - \cancel{w} & = & -80 \\ \underline{4t + q + \cancel{w}} & \underline{=} & \underline{90} \end{array}$$

Resulta la nueva ec. 5: $2t - q = 10$

Nuestro sistema se ha reducido a estas dos ecuaciones

ec. 4 $-5t = -75$

ec 5 $2t - q = 10$

Como se eliminó también q en la ecuación 4, no es necesario volver a reducir el sistema anterior; basta con despejar t en ec.4 y sustituir el resultado en 5 para obtener el valor de q.

ec. 4 $-5t = -75$

$t = \frac{-75}{-5} = 15$ pesos

Entonces ec. 5

$$2t - q = 10$$
$$2(15) - q = 10$$
$$30 - q = 10$$
$$30 - 10 = q$$
$$q = 20\ pesos$$

Para obtener w, sustituimos los valores t y q en cualquier ecuación original

Elegimos ec. 2 ec 2 $4t + q + w = 90$

$4(15) + 20 + w = 90$

$60 + 20 + w = 90$

$80 + w = 90$

$w = 90 - 80$

Respuesta: un taco \$15, una quesadilla \$20 y un agua \$10 $w = 10$ pesos.

B) Método de igualación.

Para llevar a cabo este proceso, despejamos una de las incógnitas o literales de las tres ecuaciones. Despejaremos t de las tres ecuaciones. Aunque no es el despeje que facilita el proceso, nos servirá para ejemplificar mejor las dificultades que podemos encontrar en otros problemas.

Nuestro sistema de ecuaciones es: ec. 1 $3t + 2q + 2w = 105$

ec. 2 $4t + q + w = 90$

ec. 3 $2t + 2q + w = 80$

Despejando t en ec. 1 $3t + 2q + 2w = 105$

obtenemos la ec. 4: $3t = 105 - 2q - 2w$

ec. 4 $t = \frac{105-2q-2w}{3}$

Despejando t en ec. 2 $4t + q + w = 90$

obtenemos la ec. 5: $4t = 90 \ - q - w$

ec. 5 $t = \frac{90-q-w}{4}$

Despejando t en ec. 3 ec. 3 $2t + 2q + w = 80$

obtenemos la ec. 6 $2t = 80 - 2q - w$

ec. 6 $t = \frac{80-2q-w}{2}$

Con estas tres nuevas ecuaciones que representan los valores de t, podemos igualar sus valores (ya que representan la misma incógnita) para generar un sistema de ecuaciones con solo dos incógnitas, q y w.

ec. 4 $t = \frac{105-2q-2w}{3}$ ec. 5 $t = \frac{90-q-w}{4}$ ec. 6 $t = \frac{80-2q-w}{2}$

Igualando 4 y 5 y simplificando: $\frac{105-2q-2w}{3} = \frac{90-q-w}{4}$

$4(105 - 2q - 2w) = 3(90 - q - w)$

$420 - 8q - 8w = 270 - 3q - 3w$

$-8q + 3q - 8w + 3w = 270 - 420$

obtenemos la ec. 7 ec. 7 $-5q - 5w = -150$

Para encontrar la otra ecuación igualamos 5 y 6. $\frac{90-q-w}{4} = \frac{80-2q-w}{2}$

y haciendo todo el proceso de simplificación. $90 - q - w = \frac{4(80-2q-w)}{2}$

$90 - q - w = 2(80 - 2q - w)$

$90 - q - w = 160 - 4q - 2w$

$-q + 4q - w + 2w = 160 - 90$

obtenemos la ec. 8 ec. 8 $3q + w = 70$

¡Bien!, tenemos nuestro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

ec. 7 $-5q - 5w = -150$

ec. 8 $3q + w = 70$

A partir de aquí podemos proceder por cualquiera de los métodos ya descritos. Vamos a resolver por el método de sustitución.

Despejamos w de la ecuación 8: ec. 9 $w = 70 - 3q$

Sustituimos w en la ecuación 7: $-5q - 5w = -150$

$-5q - 5(70 - 3q) = -150$

Simplificamos y despejamos q: $-5q - 350 + 15q = -150$

$10q - 350 = -150$

$10q = -150 + 350$

$10q = 200$

$q = \frac{200}{10} = 20\ pesos$

Conociendo el costo de una quesadilla, sustituimos este valor en la ecuación 9 para saber el costo de un agua: ec. 9 $w = 70 - 3q$, ecuación 9.

$$w = 70 - 3(20) = 70 - 60 = 10\, pesos.$$

Ahora solo falta el costo de los tacos. Este lo podemos calcular usando cualquiera de las ecuaciones 4 al 6. Usando la ecuación 5.

$$t = \frac{90-q-w}{4}\ , ec. 5 \text{ --------- } t = \frac{90-10-20}{4} = \frac{60}{4} = 15\, pesos.$$

Y así tenemos las mismas soluciones que obtuvimos con el método de reducción.

Actividades

I. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{Bmatrix} 4x + 3y + z = 15 \\ x - y - 2z = 2 \\ 2x - 4y + z = 4 \end{Bmatrix}$ 2. $\begin{Bmatrix} 2x + 2y + 2z = 12 \\ 3x + 2y - 5z = -7 \\ x + y - z = 0 \end{Bmatrix}$

II. Resuelvan los siguientes problemas

Problema 1. Una parte de 25 000 dólares se invierte al 10% de interés, otra parte al 12 % y el resto al 16%. El ingreso anual total de las tres inversiones es de 3200 dólares. Además, el ingreso de la inversión al 16% es igual al ingreso de las otras dos inversiones combinadas. ¿Cuánto se invirtió a cada tasa de interés?

Problema 2. En los exhibidores de una papelería hay memorias USB de 8, 16 y 32 GB. La memoria de 32 GB cuesta 150 pesos más que la de 16 GB y 240 más que la de 8 GB. En esa Papelería Carlos compro 2 USB de GB, una de 16 y una de 32 por las que pagó 1050 pesos. Juan compró una de 8 GB, 2 de 16 y una de 32 GB pagando en total 1140 pesos. José compró una de 8 GB, una de 16 GB y 2 de 32 GB por 1290 pesos. ¿Cuál es el costo de cada tipo de USB?

Actividades de Cierre

A continuación, realizaremos un ejemplo más de solución de problemas para que tengan mayores herramientas en la realización de las actividades de los siguientes apartados.

Si una muchacha trabaja 8 minutos y su hermano 15 minutos pueden pintar una pared de su cuarto. Además, si la muchacha trabaja 12 minutos y su hermano 10 minutos, pueden pintar en ese tiempo la misma pared. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno por si solo para pintar la pared?

Empezaremos por definir las incógnitas:

t_m = tiempo que haría la muchacha sola

t_h = Tiempo que haría el hermano solo

Ahora debemos razonar sobre la manera de hallar equivalencias o igualdades para formar las ecuaciones.

Las fracciones de trabajo que hace cada uno dependen de la rapidez con que hacen el trabajo. Si la hermana sola tardara 20 minutos, entonces cada minuto hiciera 1/20 del trabajo, pero como sabemos que el tiempo es la incógnita t_m, por lo tanto, la muchacha, cada minuto hace $1/t_m$, si esto lo multiplicamos por los minutos trabajados, obtendríamos la fracción del trabajo que ella realiza. Para el hermano haríamos un razonamiento semejante. Entonces:

Primera situación: $\frac{8}{t_m} = fracción\ del\ trabajo\ de\ la\ muchacha$

$$\frac{15}{t_h} = fracción\ de\ trabajo\ hecha\ por\ el\ hermano$$

La suma de las fracciones de trabajo de ambos debe dar un entero (el trabajo completo):

ec. 1 $\frac{8}{t_m} + \frac{15}{t_h} = 1$ esta es una de las dos ecuaciones.

Como se tienen dos incógnitas debemos desmenuzar el enunciado para encontrar más relaciones de igualdad. Inmediatamente nos damos cuenta de que la otra alternativa planteada originará la ecuación faltante.

Segunda situación: $\frac{12}{t_m}+\frac{10}{t_h}=1$, segunda ecuación.

Ya tenemos el sistema de ecuaciones:

ec. 1 $\frac{8}{t_m}+\frac{15}{t_h}=1$

ec. 2 $\frac{12}{t_m}+\frac{10}{t_h}=1$ Ahora a pensar cuál método es el más adecuado para resolverlo.

Lo resolveremos por igualación, entonces despejaremos t_m de ambas ecuaciones:

De la ecuación 1:

$\frac{8}{t_m}+\frac{15}{t_h}=1$------------- $\frac{8}{t_m}=1-\frac{15}{t_h}$ --------- $\frac{8}{t_m}=\frac{t_h-15}{t_h}$ ------- $\frac{t_m}{8}=\frac{t_h}{t_h-15}$ ---- $t_m=\frac{8t_h}{t_{h-15}}$ ecuación 3

De la ecuación 2:

$\frac{12}{t_m}+\frac{10}{t_h}=1$ ---------- $\frac{12}{t_m}=1-\frac{10}{t_h}$ --------- $\frac{12}{t_m}=\frac{t_h-10}{t_h}$ ---- $\frac{t_m}{12}=\frac{t_h}{t_h-10}$ ---- $t_m=\frac{12t_h}{t_h-10}$ ecuación 4.

Si igualamos ecuaciones 3 y 4 podemos despejar y conocer t_h.

$\frac{8t_h}{t_{h-15}}=\frac{12t_h}{t_h-10}$ ---------- $8\cancel{t_h}(t_h-10)=12\cancel{t_h}(t_h-15)$ --------- $8(t_h-10)=12(t_h-15)$ -----

$8t_h-80=12t_h-180$ --------- $8t_h-12t_h=80-180$ --------- $-4t_h=-100$

de donde $t_h=\frac{-100}{-4}=25\ minutos.$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 4.

$t_m=\frac{12t_h}{t_h-10}=\frac{12(25)}{25-10}=\frac{300}{15}=20\,minutos$

Por tanto, la muchacha tardaría 20 minutos y su hermano 25 si pintaran cada quién por su cuenta la pared.

I. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones por reducción e igualación.

1. $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x - 5y = -21 \\ 5x + 3y = -6 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = -1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{4}{x} + \frac{7}{y} = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y + 5z = 2 \\ 4x - 3y + 5z = 3 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$

II. Resuelvan los siguientes problemas.

1. Una mujer ha invertido una suma de dinero. Si hubiera invertido 6000 pesos mas a un interés de 1% mas baja, hubiera obtenido el mismo ingreso anual que con su inversión. Además, si hubiera invertido 4500 pesos menos a una tasa 1 % mayor , su ingreso anual también sería el mismo. ¿Cuánto invirtió y a que tasa de interés?

2. Un pintor y su hijo pueden pintar una habitación conjuntamente en 8 horas. Si el padre solo durante 3 horas y después llega su hijo a ayudarle, el trabajo se terminaría en 6 horas más. ¿Cuánto tardaría cada uno en pintar la habitación sin ayuda?

3. Si la temperatura de ebullición del agua a una altura h (medida en pies sobre el nivel del mar) es t grados Celsius, entonces, $h = a + bt + ct^2$, donde a, b y c son coeficientes que deben determinarse experimentalmente. En la experimentación, se encontró que el agua hierve a 100 °C al nivel del mar, a 95°C a 7400 pies de altura y a 90 °C a 14 550 pies, determine los valores de a, b y c.

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Problema 1.

A la verdulería La pasadita acaban de llegar 3 contenedores con productos que se detallan en la siguiente tabla:

Número del contenedor	Kgs. de cebolla	Kgs. de Zanahoria	Kgs. de tomate.	Importe del producto en contenedor(pesos)
1	800	300	500	16 900
2	500	400	400	14 800
3	700	600	800	24 200

Con la información proporcionada calcule el precio por kilogramo de cada producto.

Problema 2

Un Tráiler transporta un contenedor cargado con tomate, cebolla y zanahoria. El precio de compra de cada producto es de 25, 18 y 24 pesos por kilogramo respectivamente. El peso total del contenedor es de 3 toneladas y el peso de la cebolla iguala al peso de la zanahoria y el tomate. El costo del producto es de 64 000 pesos. ¿Cuántos kilogramos de cada producto lleva el contenedor?

Ejercicios Adicionales

Si el numerador y denominador de una fracción se aumentan en 5, la fracción resultante es 2/3. Pero si tanto el numerador como el denominador se disminuyen en 5, la fracción resultante equivale a 3/7. ¿Cuál es la fracción original?

1. Un hombre tarda 23 minutos mas que su hijo para recorrer 5 millas. Sin embargo, si el hombre duplica su velocidad, puede recorrer la misma distancia en un minuto menos que su hijo. ¿Cuál es la velocidad del hombre y cuál la de su hijo?
2. En 20 onzas de una aleación hay 6 onzas de cobre, 4 onzas de zinc y 10 onzas de plomo. En 20 onzas de una segunda aleación hay 12 onzas de cobre, 5 onzas de zinc y 3 onzas de plomo, mientras que en una tercera aleación hay 8 onzas de cobre , 6 onzas de zinc y 6 onzas de plomo. ¿cuántas onzas de cada aleación tiene que combinarse para obtener una aleación que contenga 34 onzas de cobre, 17 onzas de zinc y 19 onzas de plomo?

5.2 Ecuaciones cuadráticas

Introducción

Se llama ecuación cuadrática o de segundo grado a toda ecuación que tiene la forma

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

donde “x” es una variable, los coeficientes “a, b y c” son números cualesquiera y donde “a” es diferente de cero. Las ecuaciones cuadráticas pueden ser “completas” o “**incompletas**”

ECUACIONES COMPLETAS	ECUACIONES INCOMPLETAS
$ax^2+bx+c=0$	$ax^2+bx=0$ $ax^2+c=0$

Actividades de Apertura

Actividad

En las siguientes ecuaciones cuadráticas, identifica los coeficientes numéricos y escribe sus valores (sigue el ejemplo del primer renglón):

No.	Ecuación cuadrática	Coeficientes numéricos		
		a	*b*	*c*
1)	$10x^2 + 2x - 3 = 0$	***10***	***2***	***-3***
2)	$x^2 - 3x + 2 = 0$			
3)	$-2y^2 + y + 3 = 0$			
4)	$3x^2 + 3 = 0$			
5)	$x^2 + x + 9 = 0$			
6)	$-2x^2 - 3x = 0$			

Actividad

En los siguientes ejercicios, utiliza las palabras “completa” o “incompleta”. Identifica y anota sobre la línea el tipo de ecuación que representa.

No.	Ecuación cuadrática	Tipo
1)	$x^2 - 5x + 10 = 0$	Es una ecuación __________
2)	$x^2 – 5x = 0$	Es una ecuación __________
3)	$x^2 – 3x + 2 = 0$	Es una ecuación __________
4)	$x^2 – 9 = 0$	Es una ecuación __________
5)	$2x^2 – 200 = 0$	Es una ecuación __________

Reducción de una ecuación cuadrática a su forma general

A la expresión $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ se le conoce como forma general de una ecuación cuadrática.

Los siguientes ejemplos muestran la manera en que una ecuación cuadrática puede reducirse a la forma general efectuando la transformación adecuada.

Ejemplo 1: Transformar la siguiente ecuación a su forma general.

$$\mathbf{2x^2 + 10x = 4x + 5}$$

Primer paso: pasar todos los términos al primer miembro, para igualar a cero

$$2x^2 + 10x – 4x – 5 = 0$$

Segundo paso: reducir los términos semejantes.

$$2x^2 + 6x – 5 = 0$$

Ejemplo 2: Transformar la siguiente ecuación a su forma general.

$$\mathbf{(x + 1)^2 – 2x(x -2) = 0}$$

Primer paso: desarrollar los productos de los binomios.

$$X^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 4x = 0$$

Segundo paso: reducir los términos semejantes.

$$-x^2 + 6x + 1 = 0$$

Actividades de Desarrollo

Reduce a la forma general las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1) $x^2 - 7 = 2x + 3$	2) $(x+1)(x-2) + x^2 = 0$	3) $x(x+2) + (x+3)^2 = 0$
______________________	______________________	______________________
4) $2x(x+3) + (x-3)^2 = 9$	5) $x^2 + (x+1)^2 = (x-1)(x+2)$	6) $(x+1)^2 + 3 = (x+2)^2 - x^2$
______________________	______________________	______________________

5.2.1 Métodos de solución

a) Método Gráfico

Una ecuación cuadrática tiene por representación gráfica una curva llamada parábola. Si la parábola corta el eje de las "x" en uno o dos puntos, la abscisa de esos puntos es la raíz o solución de la ecuación.

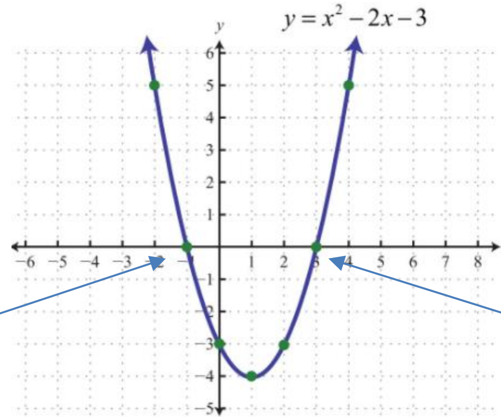
Recuerda que un punto en un plano cartesiano está compuesto por una pareja de coordenada (x , y) es decir (abscisa, ordenada).

Para realizar la gráfica de una ecuación, es necesario hacer una sustitución de valores "x", de tal manera que cada resultado obtenido es el valor de la ordenada "y", y en conjunto forman la pareja ordenada, que representa un punto en el plano cartesiano.

Observa: si tenemos una ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ y deseamos encontrar las raíces de la ecuación por el método gráfico, vamos a requerir transformar la ecuación en una función "y", de tal forma que tengamos ahora: **$y = x^2 - 2x - 3$**

Raíz

x_1=-1



Raíz

x_2 = 3

x	y
-2	5
-1	**0**
0	-3
1	-4
2	-3
3	**0**
4	5

Ahora bien, definamos un rango de valores para “x” y realicemos la sustitución en la función:

$y = x^2 - 2x - 3$

Tomaremos para este ejemplo un rango de valores de -2 a 4, y sustituiremos en la función:

Si x = -2	**Si x = -1**	**Si x = 0**
$Y = (-2)^2 - 2(-2) - 3$ $Y = 4 + 4 - 3$ $Y = 5$	$Y = (-1)^2 - 2(-1) - 3$ $Y = 1 + 2 - 3$ $Y = 0$	$Y = (0)^2 - 2(0) - 3$ $Y = 0 + 0 - 3$ $Y = -3$

Y así sucesivamente con cada valor definido en el rango. Observa que cada pareja de valores de la tabla que se encuentra junto a la gráfica se genera con el procedimiento anterior.

Actividad

Determina las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante una gráfica.

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$

2) $x^2 - 4x + 4 = 0$

3) $x^2 - 2x = 0$

4) $x^2 - 4 = 0$

5) $x^2 - x - 6 = 0$

6) De las siguientes ecuaciones, subraya aquella que corte al eje de las "x" en los puntos: (-1,0) y (1,0) y realiza su gráfica.

a) $x^2 + x + 1 = 0$ b) $x^2 - 1 = 0$ c) $x^2 - x - 1 = 0$

Grafica la ecuación:

b) Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas

Una ecuación cuadrática siempre tendrá dos soluciones, a las cuales se les conoce como raíces de la ecuación, las soluciones pueden ser iguales o diferentes, también pueden ser reales o imaginarias.

Para resolver una **ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$**, donde el coeficiente "b" es igual a cero, puedes utilizar el siguiente procedimiento:

Ejemplo 1: Resuelve la siguiente ecuación cuadrática y obtén sus raíces.

$\mathbf{x^2 - 9 = 0}$

Primer paso: pasar el término independiente al segundo miembro (derecha)

$x^2 = 9$

Segundo paso: obtén las raíces de la ecuación, sacando raíz cuadrada a ambos miembros.

$x = \sqrt{9}$

$x = \pm 3$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$ raíces de la ecuación (dos soluciones)

Ejemplo 2: Encuentra las raíces de la siguiente ecuación cuadrática.

$\mathbf{x(2x + 3) = 3x + 50}$

Primer paso: realiza el producto de la izquierda

$2x^2 + 3x = 3x + 50$

Segundo paso: pasar los términos de la derecha al primer miembro (izquierda)

$2x^2 + 3x - 3x - 50 = 0$

Tercer paso: reducir los términos semejantes.

$2x^2 \cancel{+ 3x - 3x} - 50 = 0 \qquad 2x^2 - 50 = 0$

Cuarto paso: pasa el término independiente al segundo miembro y divide entre el coeficiente de "a"

$2x^2 = 50$

$x^2 = 50 / 2$

$x^2 = 25$

Quinto paso: obtén las raíces de la ecuación, sacando raíz cuadrada a ambos miembros.

$x = \sqrt{25}$

$x = \pm 5$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = -5$ raíces de la ecuación

Actividades de Cierre

Obtén las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1) $x^2 - 36 = 0$	2) $x^2 - 16 = 0$	3) $2x^2 = 200$
4) $4x^2 = 4$	5) $(x - 2)^2 = 8 - 4x$	6) $(x + 3)^{2=} = 6x + 34$
7) $(x + 1)(x - 1) = 3$	8) $(x - 2)(x + 1) = 2 - x$	9) $(x + 2)(x + 3) = 5x + 55$

10) $(x + 3)(x - 3) = 27$

Ahora bien, para resolver una **ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$**, donde el coeficiente "c" es igual a cero, puedes utilizar el siguiente procedimiento:

Este **método** consiste en **factorizar** y aplicar la propiedad del cero en la multiplicación: si el producto (multiplicación) de dos factores es cero, entonces al menos uno de ellos es cero.

Ejemplo: Encuentra las raíces de la siguiente ecuación cuadrática. **$2x^2 = 5x$**

Primer paso: pasar el término de la derecha al primer miembro (izquierda)

$2x^2 - 5x = 0$

Segundo paso: Factoriza el término semejante (en este caso "x").

$x(2x - 5) = 0$

Tercer paso: Como el producto de los factores es igual a cero, entonces:

$x = 0 \qquad 2x - 5 = 0$

Cuarto paso: pasa el término independiente al segundo miembro y divide entre el coeficiente de "a"

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = 5 / 2$$

$$x = 2.5$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación son: $X_1 = 0$ $X_2 = 2.5$

Actividad: Resuelve por factorización cada una de las ecuaciones y obtén sus raíces.

1) $x^2 - 2x = 0$	2) $x^2 + 4x = 0$	3) $x(x + 4) = 3x^2$
4) $(x - 2)^2 = 2x + 4$	5) $(x - 2)^2 + x(x + 3) = 4$	6) $x(x + 1) + (x + 1)^2 = 1$
7) $5x^2 + 30x = 0$	8) $7x^2 - 49x = 0$	9) $3x^2 = 12x$

10) $11x^2 = -121x$

c) Solución de ecuaciones cuadráticas completas utilizando el método de factorización

Para resolver una ecuación cuadrática completa de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, podemos utilizar varios métodos: Factorizando, completando el trinomio cuadrado perfecto, graficando o bien utilizando la fórmula general.

En esta primera parte utilizaremos el **método de factorización**.

Ejemplo 1: Resuelve la siguiente ecuación cuadrática y obtén sus raíces.

$$\mathbf{x^2 - 11 = 10x}$$

Primer paso: pasar el término de la derecha a primer miembro (izquierda) para igualar a cero la ecuación. $x^2 - 10x - 11 = 0$

Segundo paso: factoriza el trinomio de segundo grado. $(x - 11)(x + 1) = 0$

Tercer paso: Iguala a cero cada factor del producto $x - 11 = 0$ $x + 1 = 0$

Cuarto paso: despeja cada ecuación para encontrar las raíces. $x_1 = 11$ $x_2 = -1$

Ejemplo 2: Encuentra las raíces de la siguiente ecuación cuadrática.

$$\mathbf{x^2 - 5x + 4 = 0}$$

Primer paso: factoriza el trinomio de segundo grado. $(x - 4)(x - 1) = 0$

Segundo paso: Iguala a cero cada factor del producto $x - 4 = 0$ $x - 1 = 0$

Cuarto paso: despeja cada ecuación para encontrar las raíces. $x_1 = 4$ $x_2 = 1$

Actividad: Resuelve por factorización cada una de las ecuaciones y obtén sus raíces.

1) $x^2 - 10x + 25 = 0$	2) $x^2 + 2x + 1 = 0$	3) $x^2 - 3x = 28$
4) $x^2 - 6x = -5$	5) $x^2 - 4x + 4 = 0$	6) $14 = x^2 + 5x$
7) $10x = 24 - x^2$	8) $4x^2 - x = 3x^2 - 4x - 2$	9) $x(x + 4) = 12$
10) $x(x - 3) = 2(10 - x)$		

d) Solución de ecuaciones cuadráticas completas utilizando la fórmula general

Este método conocido como fórmula general, permite resolver cualquier ecuación cuadrática ya sea completas e incompletas, sin embargo, es más común que este método se utilice para la resolución de ecuaciones completas, en cualquiera de los casos necesitaras que la ecuación se encuentre igualada a cero y acomodada en su forma general: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas la conocemos como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A $\sqrt{b^2 - 4ac}$ se le conoce como discriminante, el cual nos permite conocer la naturaleza y el número de soluciones diferentes que tiene una ecuación.

De tal manera que si el discriminante es:

- Un número positivo (mayor que cero), tendrá dos soluciones diferentes
- Cero, tendrá una solución (ambas soluciones x_1 y x_2 son iguales)

- Un número negativo, no tendrá soluciones reales (son imaginarias)

Esto te ayudara a prever o anticipar el tipo de solución que tendrás al resolver una ecuación.

Ejemplo: Encuentra las raíces de la siguiente ecuación cuadrática.

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

Primer paso: identifica los valores de “a”, “b” y “c” a = 3 b = -8 c= 4

Segundo paso: sustituye cada valor en la formula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2-4(3)(4)}}{2(3)}$$

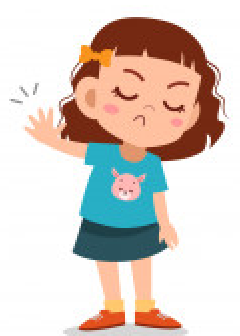
Tercer paso: realiza las operaciones indicadas. $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64-48}}{6}$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{6}$$

Observa que el discriminante $\sqrt{16}$ es un valor positivo, lo que nos indica que la ecuación tendrá dos soluciones diferentes. $x = \frac{-(-8) \pm 4}{6}$

Cuarto paso: obtén las raíces

Por un lado sumamos	Por otro lado restamos
$x_1 = \frac{8+4}{6}$	$x_2 = \frac{8-4}{6}$
$x_1 = \frac{12}{6}$	$x_2 = \frac{2}{6}$
$x_1 = 2$	Reduciendo la fracción
	$x_2 = \frac{1}{3}$



Actividad: Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante el método de la fórmula general.

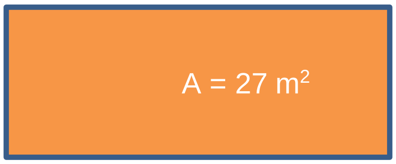
1) $x^2 + 9x + 18 = 0$	2) $x^2 + 6x + 8 = 0$
3) $x^2 - 7x + 12 = 0$	4) $3x^2 + 5x + 2 = 0$
5) $5x^2 - 13x + 6 = 0$	6) $2x^2 - x - 6 = 0$
7) $2x^2 - 9x - 5 = 0$	8) $4x^2 - 4x + 4 = 0$
9) $(x + 2)(x + 3) = 0$	10) $(x + 2)^2 = 4x + 20$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Ejemplo 1: Si el largo de un jardín que tiene forma rectangular es 6 metros mayor que su ancho y el área del jardín es de 27 metros cuadrados. Determina el perímetro del jardín.

Paso 1: Analicemos el problema:

Largo: $x + 6$



Área de un rectángulo: A = largo × ancho

Perímetro de un rectángulo: P = 2 (largo+ancho)

Ancho x

Paso 2: Construimos la ecuación y desarrollamos para calcular las raíces.

$x(x+ 6) = 27$

$x^2 + 6x = 27$

$x^2 + 6x – 27 = 0$

$(x + 9)(x – 3) = 0$

$X + 9 = 0 \qquad x – 3 = 0$

$X_1 = - 9 \qquad x_2 = 3$

Paso 3: Analizamos las raíces. Como lo que deseamos saber es una dimensión de un terreno, no nos sirven los valores negativos, por lo que desechamos $x_1 = -9$ y elegimos para continuar $x_2= 3$.

Entonces tenemos que el ancho del jardín es de 3 metros y el largo es de 9 metros (ya que el problema nos dice que el largo es 6 metros mayor que el ancho).

Paso 4: Realizamos el cálculo del perímetro.

$P = 2(3 + 9)$

$P = 24$ ***Solución del problema:*** El perímetro del jardín mide 24 metros.

Ejemplo 2: La suma de dos números es -3 y el producto de ambos es -88. Determina cuales son los números.

Paso 1: Analicemos el problema:

Tenemos dos números desconocidos “x” “ y”

Si $x + y = -3$

Entonces $y = -3 - x$

Si el producto lo definimos como: $x (y) = -88$

Paso 2: sustituimos “y” para construir la ecuación y desarrollamos para calcular las raíces.

$x (-3 -x) = -88$

$-3x -x^2 = -88$ pasamos todos al segundo miembro

$x^2 + 3x - 88 = 0$

$(x +11)(x - 8) = 0$ Factorizamos

$x + 11 = 0$ $x- 8 = 0$

$x_1 = - 11$ $x_2 = 8$

Paso 3: analizamos las raíces. En este tipo de problemas buscamos números positivos y/o negativos que nos den como solución de una multiplicación -88, por lo que las raíces las podemos de manera directa $x_1 = - 11$ $x_2 = 8$, y solo comprobamos.

La suma de $(-11) + (8) = -3$

Y su multiplicación $(-11) (8) = -88$ cumplen con las condiciones establecidas.

Solución del problema: Los números son -11 y 8

Ejercicios Adicionales

Resuelve los siguientes problemas.

1. Se desea construir el marco para un retrato rectangular el cual ocupa una superficie de $500cm^2$, si se sabe que la base del marco es 5 centímetros mayor que la altura, ¿Cuáles son las dimensiones del marco fotográfico?

2. El producto de dos números enteros consecutivos es 210. Determina cuales son los números.

3. El cuadrado de un número más el triple del mismo número da como resultado 40. ¿Cuál es el número?

4. Se desea construir una cerca de un terreno rectangular, si se sabe que el largo del terreno es el doble que su ancho y su área es de 450 metros cuadrados. Además, sabemos que el metro lineal de cerca tiene un costo de 125 pesos. Determina sus dimensiones, perímetro del terreno y el costo de construir la cerca.

Ejercicios Adicionales

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 = 25$
2. $3x^2 = 12$
3. $x^2 - 3x = 0$
4. $x(x + 5) = 0$
5. $(x + 2)^2 = 4x + 20$
6. $(x + 2)(x + 3) = 0$
7. $(x - 2)(x - 3) = 0$
8. $x^2 - 5x + 4 = 0$
9. La gráfica de la ecuación cuadrática $x^2 - 3x + 2 = 0$ es una parábola que corta al eje de las x en los puntos cuyas abscisas son:
10. La gráfica de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x = 0$ es una parábola que corta al eje de las x en los puntos cuyas abscisas son:
11. La gráfica de la ecuación cuadrática $x^2 + 6x + 9 = 0$ es una parábola que corta al eje de las x en los puntos cuyas abscisas son.
12. La longitud de un rectángulo es 7 cm mayor que su ancho. El área es 120 cm^2. Halla las dimensiones.

Fuentes consultadas

Aguilar, M., A., Bravo, V., F. V., Gallegos, R., H. A., Cerón, V., M., & Reyes F., R. (2009). *Aritmética*.México: Pearson

Aguilar, M., A., Bravo, V., F. V., Gallegos, R., H. A., Cerón, V., M., & Reyes F., R. (2009). *Geometría y Trigonometría*.México: Pearson

ANDRIOD JEFE., (2 de marzo 2018), Cómo obtener coordenadas en Google Maps Android.[Entrada en un Blog], Recuperado de: https://www.androidjefe.com/obtener-coordenadas-google-maps/

Baldor, A., (1997). *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*. México, Publicaciones Cultural, S. A. de C. V.

Cuellar C., J. A. (2004). *Algebra.* México: Mc Graw. Hill

Cuéllar, J. A. (2019). *Matemáticas 2*.México: McGrawHill

Dennis, G., Dewar, J. (1992). *Álgebra y Trigonometría*. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill.

Dieter, Sacher, H. (s.f.). Potencia en contextos cotidianos. Recuperado el 19 de mayo de 2016, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles20433_recurso_pauta_pdf.pdf

Duarte, Sánchez, J. M. (2010). *Secuencia didáctica para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia con base en el Análisis Didáctico*.Hermosillo, Sonora.

García, J., Marco. A., (2013) Cuadernos de ejercicios: Baldor, México, Grupo Editorial Patria.

Gobran, A. (2003). *Algebra elemental*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ortiz, C., Francisco, J., (1999). *Algebra.Matemáticas I.* México: Publicaciones Cultural.

Netto, R. (2020). *Fisicanet*.Argentina. n/aRecuperado de:https://www.fisicanet.com.ar/matematica/trigonometria/ap01-identidades-trigonometricas.php

Martínez, M., Á. (1996). *Aritmética y Algebra*. México: Mc Graw Hil

.

Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade
Jefe de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet
Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia
Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes
Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Luis Manuel Guerra Franco
Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

ME Martin Vega Gómez
Coordinador de la Mesa de trabajo de Algebra

MC Gerardo Valdés Bermudes
Edición de la obra

ME Omar Eduardo De la Torre Aldama
Coordinador de la Mesa de trabajo de Algebra y Edición de la obra

Academia Nacional de Matemáticas

Integrantes de la Academia Nacional de Matemáticas que participaron en la elaboración de ésta obra

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
José Luis Colorado Betanzos	CBTIS 69	Baja California Sur
Raul Toledo Escobar	CBTIS 62	Baja California Sur
Ana María García Zúñiga	CETIS 2	CD. de México
Loan Alejandra Servín Rodríguez	CETIS 52	CD. de México
Brillante Zavala Centeno	UAC	Campeche
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Ángel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Jesús Eugenio Ruiz Flores	CBTIS 60	Guanajuato
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas