GUIA DE APRENDIZAJE N°2

TÉCNICAS DE CONTEO: CONCEPTOS PREVIOS

Departamento de matemática

Nombre del profesor(a): Ingrit Bejar H.

Nombre del estudiante:……………………………………………………………………………Curso: 3° medio B
Nombre de la Unidad: Estadística y Probabilidades
Objetivo de aprendizaje: Desarrollar las Técnicas de conteo, de manera concreta y simbólica, de manera manual, en el contexto de la resolución de problemas.
Tiempo de desarrollo: 120 minutos

Las **Técnicas de conteo** son utilizadas en Probabilidad y Estadística para determinar el número total de resultados. En este capítulo analizamos: Regla de factoriales, Principio de multiplicación, Principio aditivo, Permutaciones (simples, permutaciones circulares y con elementos repetidos), Variaciones y Combinaciones.

1) FACTORIALES:

Definición: Sea n un número natural. Se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. La expresión **n!** se lee, n factorial. Es así que:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

Propiedades:

a) $n! = n \cdot (n-1)!$ Ejemplos: $7! = 7 \cdot 6!$; $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$
b) $x! = n! \rightarrow x = n$
c) $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ Ejemplo: $\frac{5!}{5} = (5-1)! = 4!$
d) $\frac{n!}{(n-1)!} = n$ Ejemplo: $\frac{12!}{11!} = 12$

Observación: Algunos factoriales son:

$0! = 1$	$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$1! = 1$	$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

2) PRINCIPIO MULTIPLICATIVO:

Si un suceso ocurre de n_1 maneras diferentes, el segundo suceso de n_2 maneras diferentes y así sucesivamente hasta la última alternativa que puede realizarse de n_k maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre el suceso definido está dado por $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$

Ejemplo 1: Si tengo tres camisas, cinco pantalones y cuatro corbatas. ¿De cuántas maneras distintas puedo combinar una camisa, un pantalón y una corbata?

Respuesta: $(3 \cdot 5 \cdot 4) = 60$ maneras diferentes

Ejemplo 2: Un restaurant ofrece 4 entradas, 5 platos principales y 2 postres. ¿De cuántas formas un cliente puede ordenar una comida?

Respuesta: Se aplica el principio de multiplicación, por lo tanto hay 4 x 5 x 2 formas diferentes de ordenar una comida: 40 formas.

3) PRINCIPIO ADITIVO:

Si un suceso tiene formas alternativas de llevarse a cabo, donde la primera de esas alternativas puede realizarse de m_1 maneras, la segunda alternativa puede realizarse de m_2 maneras, y así sucesivamente, hasta la última que puede realizarse de m_k maneras, entonces el número total de maneras en que ocurre este suceso es $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k$

Ejemplo: Si me quiero comprar un automóvil, puedo elegir entre distintas marcas y modelos. La marca A tiene 2 modelos y 3 colores, la marca B tiene 4 modelos y 5 colores disponibles. ¿De cuántas maneras posibles puedo elegir un automóvil?

La respuesta a esta pregunta es de 26 maneras diferentes $(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 6 + 20 = 26)$
La marca A tiene 2 modelos y 3 colores por modelo ($2 \cdot 3 = 6$ vehículos de la marca A)
La marca B tiene 4 modelos y 5 colores por modelo ($4 \cdot 5 = 20$ vehículos de la marca B)
$6 + 20 = 26$ vehículos para elegir

4) PERMUTACIÓN:

Una permutación es cuando utilizamos todos los elementos del conjunto y los **ordenamos** de distintas formas.

A) **Permutación simple**: El número de **permutaciones** de **n** elementos está dado por: P(n) = n!

Ejemplo 1: ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra GENIAL?

$P(n) = n! \rightarrow P(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ palabras

Ejemplo 2: Una familia tiene 3 niños y 2 niñas.

a) ¿De cuántas formas pueden sentarse en una fila?
Respuesta: Hay 5! formas de sentarse = $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) ¿Cuántas formas hay si los niños desean sentarse separados de las niñas?
Si desean sentarse separados, hay 2 formas de distribuirlos: HHHMM y MMHHH y en cada caso los niños pueden sentarse de 3! formas diferentes y las niñas de 2! Por lo que hay 3! x 2! x 2! Formas = $(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) = 24$ formas.

B) **Permutación Circular**: El número de permutaciones circulares de n elementos está dado por: $P_o(n) = (n-1)!$

Ejemplo 1: ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?

Respuesta: Una persona puede sentarse en cualquier lugar, las otras 4 personas son las que pueden organizarse de 4! Maneras diferentes.

$P_o(5) = (5-1)! = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ maneras distintas

Ejemplo 2: ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra GENIAL , cuando no importa desde que letra comenzamos a leer la palabra. Es decir, cuando por ejemplo GENIAL y LGENIA, ambas se lean de igual modo.

Respuesta: $P_o(6) = (6-1)! = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ palabras

C) **Permutación con elementos repetidos**: El número de **permutaciones** de **n** elementos, cuando hay **elementos repetidos**, está dado por:

$$P_r^n = \frac{n!}{a! \cdot b! \ldots \cdot r!}$$

Ejemplo: ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra MORALEJA?

Respuesta: De las 8 letras la "A" se repite 2 veces, entonces:

$$P_2^8 = \frac{8!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 20.160 \ palabras$$

5) VARIACIÓN:

Una **variación** es el proceso de encontrar cuántos grupos diferentes se pueden formar con **n** elementos de modo que cada grupo tenga **r** elementos (r < n). La variación se diferencia de la permutación, ya que aquí no utilizamos todos los elementos.

A) VARIACIÓN SIMPLE: La variación de n elementos tomados de r en r está dado por:

$$\mathrm{V}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$$

Ejemplo 1: ¿Cuántas palabras distintas de tres letras se pueden formar con las letras de la palabra MARDONES?

Respuesta: $\mathrm{V}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})!} \rightarrow V_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336\, palabras$

Ejemplo2: ¿De cuántas formas se puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero dentro de un grupo de 10 personas?

$$\mathrm{V}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})!} \rightarrow V_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720\, maneras$$

B) VARIACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS: Misma definición anterior, pero en este caso los elementos se pueden repetir

$$\mathrm{V}_{\mathrm{r,r}}^{\mathrm{n}} = n^k$$

Ejemplo 1: ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los primeros 6 números naturales?

Respuesta: Aquí los dígitos sí se pueden repetir, porque existe el número 222 ó el 334 ó el 515, etc.
Entonces, $\mathrm{V}_{3,3}^{6} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216\, números\ de\ tres\ dígitos$

6) COMBINACIONES:

Una combinación es el proceso de encontrar la **cantidad de grupos** que se pueden formar con **n** elementos de modo que cada grupo tenga **r** elementos, **no interesando el orden** de éstos.
El número de combinaciones de **n** elementos tomados de **r** en **r** está dado por:

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})! \cdot \mathrm{r}!}$$

Ejemplo: ¿Cuántos grupos de 3 estudiantes se pueden formar con un total de 10 estudiantes?

Respuesta: Aquí no importa el orden, porque da lo mismo el grupo formado por ABC o BAC, es el mismo grupo, pues son las mismas personas.

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})! \cdot \mathrm{r}!} = C_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120\ grupos$$

Ejemplo 2: ¿Cuántos grupos de 4 letras se pueden formar con las letras de la palabra MARDONES?

Respuesta: No importa el orden, da lo mismo el grupo de letras MRDO que el grupo DROM

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})! \cdot \mathrm{r}!} = C_4^{8} = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70\ grupos$$

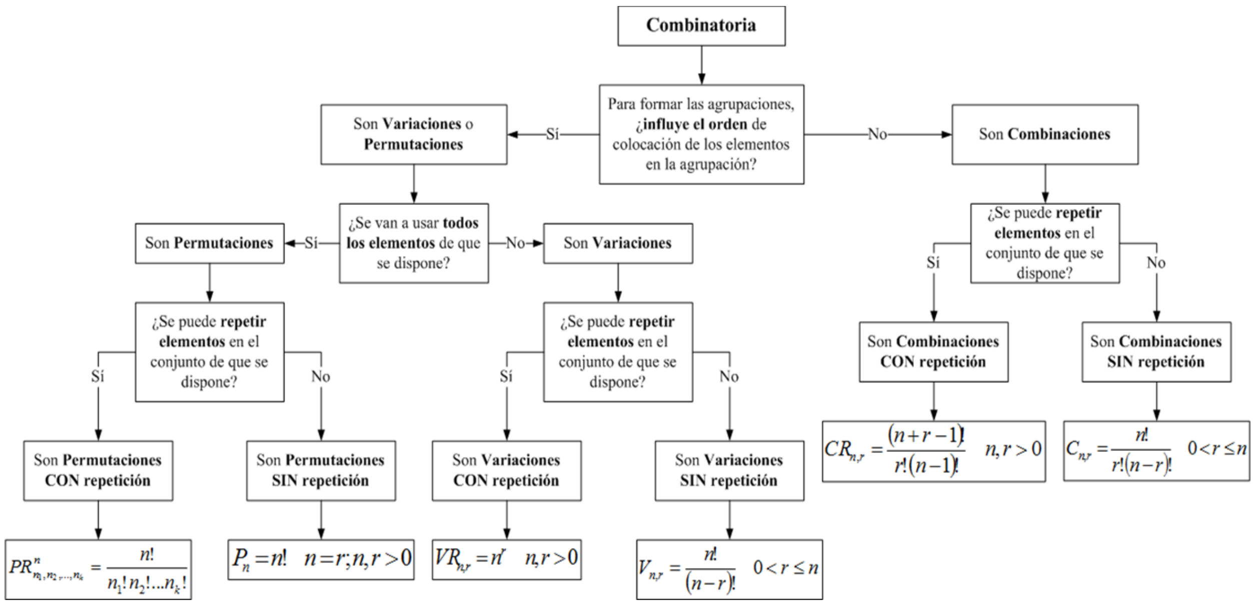
7) COMBINACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS: Misma definición anterior, pero en este caso los elementos pueden repetirse.

$$CR_{(n,k)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Ejemplo 1: En una bodega hay 4 tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 de ellas?
Respuesta: Aquí se pueden elegir las tres botellas de un mismo tipo, o dos de un mismo tipo y una diferente o las tres diferentes, entonces formaremos grupos en donde hay elementos repetidos.

$$CR_{(4,3)} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20\ formas$$

CUADRO RESUMEN:



EJERCICIOS RESUELTOS:

1) ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de fútbol sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

- Entran todos los elementos? NO
- Importa el orden? SÍ
- Se repiten los elementos? NO

$$V_3^{12} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1.320$$

2) Con las letras de la palabra **libro.** ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

- Entran todos los elementos? SÍ
- Importa el orden? SÍ
- Se repiten los elementos? NO

Hay dos vocales, entonces las palabras pueden empezar con “i” o con “o” (2 formas), si ocupo una vocal tengo que ordenar las 4 letras restantes de 4! Maneras.
Por consiguiente, hay 2 ·4! = 2·(1·2·3·4) = 48 Maneras de ordenar las letras de modo que comiencen con una de las dos vocales.

3) ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?

- Entran todos los elementos? NO
- Importa el orden? NO
- Se repiten los elementos? NO

Entonces es una combinación: $C_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot} = 35$ formas

4) ¿Cuántos partidos distintos se pueden realizar dados cuatro equipos de futbol?

- Entran todos los elementos? NO
- Importa el orden? NO
- Se repiten los elementos? NO

$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ partidos

5) ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares {1, 3, 5, 7, 9}? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70.000?

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ números

Mayores de 70.000: tienen que comenzar necesariamente con 7 ó 9 (2 formas)

$\boxed{7}$ **4 • 3 • 2 • 1 = 24 números que comienzan con 7**

$\boxed{9}$ **4 • 3 • 2 • 1 = 24 números que comienzan con 9**

Total 48 números mayores de 70.000 = $2 \cdot 4! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ números

6) A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = C_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!\cdot 2!} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45\ saludos$$

7) Con las cifras 1, 2, 3

A) ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse?

Esta es una variación con repetición:

$$V_{5,5}^3 = 3^5 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^5 = 243\ números\ de\ cinco\ cifras$$

B) ¿Cuántos son pares?

Deben terminar en 2 y hay un solo 2, entonces $V_{1,4}^3 = 3^4 \cdot 1 = 81$

8) ¿Cuántas apuestas de Loto han de realizarse para asegurarse el acierto de los seis resultados de 36 números?

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = C_6^{36} = \frac{36!}{(36-6)! \cdot 6!}$$
$$= \frac{36!}{30! \cdot 6!} = 1.947.792$$

9) ¿De cuántas formas pueden colocarse los 11 jugadores de un equipo de fútbol teniendo en cuenta que el portero no puede ocupar otra posición distinta de la portería mientras que los otros 10 pueden jugar en cualquier otra posición que no sea portero?

Los 10 jugadores pueden ocupar los 10 puestos distintos , P_{10} = 10! = 3.628.800

10) Una mesa presidencial está formada por ocho persona. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

Al ir juntos el presidente y el secretario, pasan a ser un solo cuerpo que se puede ordenar de 2 maneras (ver dibujo). Entonces se tienen sólo 7 objetos que ordenar finalmente y no 8.

$\boxed{P \mid S}$ $\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 7!$

$\boxed{S \mid P}$ $\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 7!$

$2! \cdot 7! = 10.080$

11) ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono y cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices?

Una diagonal se forma uniendo 2 vértices ($\overline{BD} = \overline{DB}$) por lo tanto es una combinación:

$$C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

en este valor están incluidos la unión de dos vértices consecutivos lo que no constituye una diagonal, si no que un lado, por lo tanto hay que restarle los 5 lados del pentágono:
10 – 5 = 5 diagonales

Un triángulo se forma uniendo tres vértices (ΔABC =Δ BCA), también es una combinación:

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \text{ triángulos}$$

12) Un grupo, compuesto por **cinco hombres** y **siete mujeres**, forma un **comité** de **dos hombres** y **tres mujeres**. De cuántas formas puede formarse, si:

A) Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer : $C_2^5 \cdot C_3^7 = 10 \cdot 35 = 350$

B) Una mujer determinada debe pertenecer al comité: $C_2^5 \cdot C_2^6 = 10 \cdot 15 = 150$

C) Dos hombres determinados no pueden estar en el comité: $C_2^3 \cdot C_3^7 = 3 \cdot 35 = 105$